LIMITI DI SUCCESSIONI

Limiti di successioni notevoli

Dato $a \in \mathbb{R}$ risulta

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}}$$

Per ogni $a > 0$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

Dato $b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}}$$

Per ogni $b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1}$$

Limiti coinvolgenti funzioni trigonometriche

Per ogni succesione $x_n \to 0$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sin(x_n) = 0}, \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \cos(x_n) = 1}$$

ed inoltre

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1}$$

e

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(x_n)}{(x_n)^2} = \frac{1}{2}}$$

Limiti coinvolgenti funzioni esponenziali e logaritmiche

Per ogni $a > 1$ risulta

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x_n \to +\infty \\ 1 & \text{se } x_n \to 0 \\ a^{x_0} & \text{se } x_n \to x_0 \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{se } x_n \to -\infty \end{cases}}$$

ed anche

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \log_a(x_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x_n \to +\infty \\ 0 & \text{se } x_n \to 1 \\ \log_a(x_0) & \text{se } x_n \to x_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } x_n \to 0^+ \end{cases}}$$

Per ogni succesione $x_n \to +\infty$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e}$$

Per ogni $x_n \to 0$ risulta

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1}$$

dove $\log x = \log_e x$. Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed ogni $x_n \to 0$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \alpha}$$

Infiniti di ordine crescente

Osservato che per ogni $b > 0$ e $a > 1$ risulta

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \log n = \lim_{n\to+\infty} n^b = \lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} n! = \lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty}$$

valgono

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$$

La relazione di asintotico

Due successioni (a_n) e (b_n) sono dette *asintotiche* per $n \to +\infty$, e si scrive $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

In particolare, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora $a_n \sim \ell$.

Sono immediate le seguenti proprietà:

a) $\boxed{\text{Se } a_n \sim b_n \text{ e } \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ allora } \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell}$.

b) $\boxed{\text{Se } a_n \sim b_n \text{ e } b_n \sim c_n \text{ allora } a_n \sim c_n}$.

c) $\boxed{\text{Se } a_n \sim b_n \text{ allora per ogni successione } (c_n) \text{ si ha } a_n c_n \sim b_n c_n,\ \dfrac{a_n}{c_n} \sim \dfrac{b_n}{c_n},\ \dfrac{c_n}{a_n} \sim \dfrac{c_n}{b_n}}$.

Alcune osservazioni. Esistono successioni che ammettono lo stesso limite ma che non sono asintotiche (si pensi ad esempio alle successioni $a_n = n^2$ e $b_n = n^4$).
La proprietà **a)** afferma che due successioni asintotiche (a_n) e (b_n) ammettono lo stesso limite (purchè regolari) ma non necessariamente che $a_n - b_n \to 0$ (si pensi alle successioni $a_n = n^2 + n$ e $b_n = n^2 + 1$).
La proprietà **c)**, anche chiamata *Principio di sostituzione*, vale per prodotti e rapporti di successioni ma non vale in generale per somme e differenze di successioni. Si considerino ad esempio le successioni $a_n = \sqrt{n^2+n+1}$, $b_n = n$ e $c_n = \sqrt{n^2+1}$. Abbiamo

$$a_n = n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \sim n = b_n.$$

mentre

$$a_n - c_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{1}{2}$$

e

$$b_n - c_n = n - \sqrt{n^2+1} = \frac{-1}{n + \sqrt{n^2+1}} \to 0$$

Dunque $a_n - c_n \not\sim b_n - c_n$ (se così fosse per **a)** i due limiti dovrebbero essere uguali).

Qualche esempio

(1) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\log(n+e^n)}{n-\log(2n+e^n)}.$$

Osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$ abbiamo però

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\log(n+e^n)}{n-\log(2n+e^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-\log(e^n(\frac{n}{e^n}+1))}{n-\log(e^n(\frac{2n}{e^n}+1))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\frac{n}{e^n}+1)}{\log(\frac{2n}{e^n}+1)}$$

ed essendo $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$, ci siamo ricondotti ad una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Ora, ricordando che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$ per ogni $x_n \to 0$, possiamo procedere nel seguente modo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\frac{n}{e^n}+1)}{\log(\frac{2n}{e^n}+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log(\frac{n}{e^n}+1)}{\frac{n}{e^n}}}{\log(\frac{\frac{2n}{e^n}+1)}{\frac{2n}{e^n}}} \frac{\frac{n}{e^n}}{\frac{2n}{e^n}} = \frac{1}{2}.$$

Il risultato si poteva ottenere utilizzando la relazione di asintotico ed i limiti notevoli sopra nel seguente modo

$$\frac{n-\log(n+e^n)}{n-\log(2n+e^n)} = \frac{\log(\frac{n}{e^n}+1)}{\log(\frac{2n}{e^n}+1)} \sim \frac{\frac{n}{e^n}}{\frac{2n}{e^n}} = \frac{1}{2}$$

(2) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{2}{n-1})}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2}.$$

Essendo noto che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$ e che $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+x_n)^{\frac{1}{2}}-1}{x_n} = \frac{1}{2}$ per ogni $x_n \to 0$, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{2}{n-1})}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{2}{n-1})}{\frac{2}{n-1}} \frac{\frac{2}{n-1}}{2(\sqrt{1+\frac{1}{4n}}-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{2}{n-1})}{\frac{2}{n-1}} \frac{\frac{1}{4n}}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}-1} \frac{\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{4n}} = 8.$$

Utilizzando la relazione di asintotico, dai limiti notevoli ricordati sopra si ottiene

$$\frac{\sin(\frac{2}{n-1})}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2} = \frac{\sin(\frac{2}{n-1})}{2(\sqrt{1+\frac{1}{4n}}-1)} \sim \frac{\frac{2}{n-1}}{2\frac{1}{2}\frac{1}{4n}} = \frac{8n}{n-1}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{2}{n-1})}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{n-1} = 8.$$

(3) Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \log(1 + (n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha).$$

Osserviamo innanzitutto che dal limite notevole $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \alpha$ per ogni $x_n \to 0$ si ottiene

$$\begin{aligned}(n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha &= (n^2+1)^\alpha[(\frac{n^2+2}{n^2+1})^\alpha - 1] = \\ (n^2+1)^\alpha[(1+\frac{1}{n^2+1})^\alpha - 1] &\sim (n^2+1)^\alpha \alpha \frac{1}{n^2+1} = \\ &= \alpha(n^2+1)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Quindi, se $\alpha > 1$ si ha $(n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha \to +\infty$ e dunque

$$\log(1 + (n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha) \to +\infty$$

Se $\alpha = 1$ allora $(n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha \to \alpha = 1$ da cui

$$\log(1 + (n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha) \to \log 2$$

Infine, se $\alpha < 1$ allora $(n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha \to 0$ e dal limite notevole $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$ per ogni $x_n \to 0$ si ottiene

$$\log(1 + (n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha) \sim (n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha$$

e quindi

$$\log(1 + (n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha) \to 0$$

Riunendo i risultati sopra otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \log(1 + (n^2+2)^\alpha - (n^2+1)^\alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \log 2 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-4}{n-1}\right)^n$ $[e^{-3}]$

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n-n^2)^4}{(4^n-n^4)^2}$ $[1]$

3. $\lim_{n\to+\infty} n^2\log(1-2^{-n})$ $[0]$

4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}$ $[0]$

5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^2+n)-\log(n^2)}{\sin\frac{2}{n}}$ $[\frac{1}{2}]$

6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\log(n+1)-\log n}$ $[1]$

7. $\lim_{n\to+\infty}[(n+1)^n-n^{n+1}]$ $[-\infty]$

8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log[3^n+\cos(3^n)]}{n}$ $[\log 3]$

9. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n^4)\sin(2^{-n})}$ $[+\infty]$

10. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log(\frac{n+3}{n})}{\sqrt[n]{2^{2^n}}}$ $[0]$

11. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$ $[3]$

12. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+e^n)}{\sqrt{1+n^2}}$ $[1]$

13. $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n-2^{n\log n}}{n^n}$ $[0]$

14. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^2-1}}{n}$ $[0]$

Calcolare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ i seguenti limiti:

1. $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha(1-\cos(\frac{1}{2^n}))$ $[0 \text{ per ogni } \alpha]$

2. $\lim_{n\to+\infty}(n^{n^\alpha}-e^n)$
   $[-\infty \text{ se } \alpha<1 \text{ e } +\infty \text{ se } \alpha\geq 1]$

3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^3})}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1}$
   $[0 \text{ se } \alpha<3,\ 3 \text{ se } \alpha=3 \text{ e } +\infty \text{ se } \alpha>3]$

4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^\alpha+1)}{\log n}$
   $[0 \text{ se } \alpha\leq 0 \text{ e } \alpha \text{ se } \alpha>0]$

5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(e^n+1)}{n^\alpha}$
   $[+\infty \text{ se } \alpha<1,\ 1 \text{ se } \alpha=1 \text{ e } 0 \text{ se } \alpha>1]$

6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{n+n^\alpha}$
   $[1 \text{ se } \alpha<1,\ \frac{1}{2} \text{ se } \alpha=1 \text{ e } 0 \text{ se } \alpha>1]$

7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\alpha^n)}{n^{\alpha-1}}$ con $\alpha>0$
   $[0 \text{ se } \alpha\neq 1,\ \sin 1 \text{ se } \alpha=1]$

8. $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha(\sqrt[5]{n^2+n}-\sqrt[5]{n^2+2n+1})$
   $[+\infty \text{ se } \alpha>\frac{3}{5},\ \frac{1}{5} \text{ se } \alpha=\frac{3}{5} \text{ e } 0 \text{ se } \alpha<\frac{3}{5}$