Integrazione di Funzioni Razionali

Un *polinomio* di grado $n \in \mathbb{N}$ è una funzione della forma $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ dove $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono costanti reali e $a_n \neq 0$.
Una funzione della forma $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi si dice *funzione razionale.*

Data una funzione razionale $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ polinomio di grado m e $Q(x)$ polinomio di grado n, se $m \geq n$ possiamo sempre decomporre $R(x)$ nella forma seguente:

$$R(x) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

dove il polinomio $P_0(x)$ è detto *parte intera* di $R(x)$ e $P_1(x)$ è polinomio di grado $m_1 < n$. Nel seguito considereremo solo funzioni razionali $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dove $m < n$.

Per quanto riguarda la determinazione della primitiva di una funzione razionale $R(x)$ iniziamo a considerare il seguente caso

$$R(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}.$$

La tecnica di integrazione di tali funzioni risulta differente a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4c$.

• $\Delta > 0$. In questo caso, dette x_1 e x_2 le due radici reali distinte del polinomio $x^2 + bx + c$, potremo scrivere $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$ e si determinano due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

Avremo allora

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c} dx = \int \frac{A}{x - x_1} dx + \int \frac{B}{x - x_2} dx = A \log|x - x_1| + B \log|x - x_2| + C.$$

Vediamo un esempio.

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$. Abbiamo $\Delta = 9 > 0$ e $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Cerchiamo allora $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{(A + B)x + 2B - A}{(x + 2)(x - 1)}.$$

Le costanti A e B saranno date da

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Allora

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{3}\log|x+2| + \frac{1}{3}\log|x-1| + C.$$

• $\Delta = 0$. In questo caso, detta x_0 l'unica radice reale del polinomio x^2+bx+c, potremo scrivere $x^2+bx+c = (x-x_0)^2$. Si procede quindi nel seguente modo. Se $\alpha = 0$ otteniamo immediatamente

$$\int \frac{\beta}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{\beta}{(x-x_0)^2}dx = -\frac{\beta}{x-x_0} + C.$$

Mentre se $\alpha \neq 0$ si procede come segue

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+\frac{2\beta}{\alpha}}{x^2+bx+c}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx + \frac{\alpha}{2}\int \frac{\frac{2\beta}{\alpha}-b}{(x-x_0)^2}dx$$
$$= \frac{\alpha}{2}\log(x^2+bx+c) - \frac{\beta-\frac{\alpha b}{2}}{x-x_0} + C.$$

In alternativa, si determinano due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$$

ottenendo

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{A}{x-x_0}dx + \int \frac{B}{(x-x_0)^2}dx = A\log|x-x_0| - \frac{B}{x-x_0} + C.$$

Un esempio è il seguente

$\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}dx$. Abbiamo $\Delta = 0$ e $x^2-4x+4 = (x-2)^2$. Si procede nel seguente modo

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2-4x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{8}{(x-2)^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2-4x+4) - \frac{4}{x-2} + C.$$

In alternativa , si determinano $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x+2}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{Ax+B-2A}{(x-2)^2}.$$

Le costanti A e B saranno date da

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2B - A = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \end{cases}$$

Allora

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}dx = \int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \log|x-2| - \frac{4}{x-2} + C.$$

• $\Delta < 0$. In questo caso il polinomio $x^2 + bx + c$ risulta indecomponibile (in $\mathbb{R}$) e procediamo nel seguente modo. Se $\alpha = 0$ otteniamo

$$\int \frac{\beta}{x^2+bx+c}dx = \beta \int \frac{1}{(x^2+bx+\frac{b^2}{4})+(c-\frac{b^2}{4})}dx = \beta \int \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+(c-\frac{b^2}{4})}dx$$
$$= \frac{2\beta}{\sqrt{4c-b^2}} \int \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \frac{1}{(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}})^2+1}dx = \frac{2\beta}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}) + C.$$

Mentre se $\alpha \neq 0$ si procede come segue

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+\frac{2\beta}{\alpha}}{x^2+bx+c}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx + \frac{\alpha}{2}\int \frac{\frac{2\beta}{\alpha}-b}{x^2+bx+c}dx$$
$$= \frac{\alpha}{2}\log(x^2+bx+c) + (\beta - \frac{\alpha b}{2}) \int \frac{1}{(x^2+bx+\frac{b^2}{4})+(c-\frac{b^2}{4})}dx$$
$$= \frac{\alpha}{2}\log(x^2+bx+c) + (\beta - \frac{\alpha b}{2})\frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \int \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \frac{1}{(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}})^2+1}dx$$
$$= \frac{\alpha}{2}\log(x^2+bx+c) + \frac{2\beta-\alpha b}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}) + C$$

Vediamo un esempio.

$\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}dx$. Abbiamo $\Delta = -4 < 0$ e procediamo nel seguente modo

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2-2x+2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + 3\int \frac{1}{(x^2-2x+1)+1}dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + 3\int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + 3\arctan(x-1) + C.$$

Nel caso di funzioni razionali del tipo $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x)$ polinomio di grado 3, si procederà come nei seguenti esempi che illustrano le varie situazioni che si possono incontrare in questo caso.

- $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$. Determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Si ottiene $A = \frac{1}{2}$, $B = -2$, $C = \frac{3}{2}$ e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{3}{2}\frac{1}{x-3}dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x-1| - 2\log|x-2| + \frac{3}{2}\log|x-3| + c\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2}dx$. Determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Si ottiene $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ e quindi

$$\int \frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \log|x| - \frac{1}{x-1} + c$$

- $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}$. Osservato che (x^2-2x+2) non ammette radici reali, determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}.$$

Si ottiene $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$ e quindi, per quanto visto nei precedenti esempi

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}dx &= -\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{x}{x^2-2x+2}dx \\ &= -\log|x-1| + \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + \arctan(x-1) + c\end{aligned}$$

Nel caso di funzioni razionali del tipo $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x)$ polinomio di grado maggiore di 3, le situazioni che si possono incontrare sono chiaramente più numerose. Tali casi si tratteranno essenzialmente come negli esempi precedenti esclusi i casi in cui $Q(x)$ contiene un termine della forma $(x^2+1)^n$, con $n \geq 2$, o riconducibili a tale forma. In tal caso si utilizzerà la seguente formula che si può provare integrando per parti. Per ogni $n \geq 2$ si ha

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}$$

osservato che

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$$

Vediamo un esempio

- $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(x^2-2x+5)^2} dx$. Osservato che x^2-2x+5 non ammette radici reali, si procede nel seguente modo. Determiniamo innanzitutto $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x^2+x}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+5} + \frac{Cx+D}{(x^2-2x+5)^2}$$

Si ottiene $A=0$, $B=1$, $C=3$, $D=-5$. Quindi, osservato che $x^2-2x+5 = (x-1)^2+4 = 4[(\frac{x-1}{2})^2+1]$, dalla precedente formula con $n=2$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2} dx &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} \frac{1}{\left[(\frac{x-1}{2})^2+1\right]^2} dx = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \frac{\frac{x-1}{2}}{((\frac{x-1}{2})^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{x-1}{2})^2+1} dx \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{x-1}{x^2-2x+5} + \frac{1}{2} \arctan(\frac{x-1}{2}) \right] + c\end{aligned}$$

Allora, utilizzando tecniche già sfruttate nei precedenti esempi si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x}{(x^2-2x+5)^2} dx &= \int \frac{1}{x^2-2x+5} dx + \int \frac{3x-5}{(x^2-2x+5)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{x-1}{2})^2+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} dx - 2 \int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2} dx = \\ &= \arctan(\frac{x-1}{2}) + \frac{3}{2} \log(x^2-2x+5) - \frac{1}{4} \left[\frac{x-1}{x^2-2x+5} + \frac{1}{2} \arctan(\frac{x-1}{2}) \right] + c \\ &= \frac{7}{8} \arctan(\frac{x-1}{2}) + \frac{3}{2} \log(x^2-2x+5) - \frac{1}{4} \frac{x-1}{x^2-2x+5} + c\end{aligned}$$

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x+1}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-x-2}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$
6. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{-x+2}{(x+2)(x-1)}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x^2(x^2+4)}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}$
11. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+1)}dx$
12. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x^2+2x+5)^2}dx$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2+4)^2}$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)^2}$
15. $\displaystyle\int \frac{x^2+x-1}{(x^2+2x+2)^3}dx$
16. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1} \frac{dx}{2x^2+2x+5}$ [$\pi/12$]
17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx$ [$-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\log 3$]
18. $\displaystyle\int_0^1 \log(2x^2-2x+1)\,dx$ [Integrare per parti. $-2+\frac{\pi}{2}$]
19. $\displaystyle\int_0^1 \log(4x^2-2x+1)\,dx$ [Integrare per parti. $\frac{3}{4}\log 3+\frac{\pi\sqrt{3}}{4}-2$]
20. $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \arctan\frac{x+3}{x+5}\,dx$ [Integrare per parti. $-\frac{1}{2}\log 2$]

Formule di razionalizzazione

Indicando con R una funzione razionale dell'argomento in parentesi, si possono razionalizzare i seguenti integrali mediante le sostituzioni indicate:

i) $\displaystyle\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ si pone $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, quindi $x = \frac{dt^n-b}{-ct^n+a}$ e $dx = \frac{ad-bc}{(-ct^n+a)^2}nt^{n-1}\ dt$;

ii) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ con $a>0$, si pone $t = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax^2+bx+c} - x$, quindi $x = \frac{at^2-c}{b-2at}$ e $dx = \frac{-2a(at^2-bt+c)}{(b-2at)^2}\ dt$;

iii) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ con $a<0$, ci si riconduce al caso (i) osservato che $ax^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta)$ e quindi $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$;

iv) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx$ ci si riconduce al caso (ii) ponendo $t = \sqrt{ax+b}$, quindi $x = \frac{t^2-b}{a}$ e $dx = \frac{2}{a}t\ dt$;

iv) $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x, \tan x)dx$ ponendo $t = \tan(\frac{x}{2})$ si ottiene $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ e $dx = \frac{2}{t^2+1}\ dt$;

v) $\displaystyle\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)dx$, ponendo $t = \tan x$ si ottiene $\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$ e $dx = \frac{1}{t^2+1}\ dt$;

Vediamo un esempio di integrale della forma (iv). Consideriamo l'integrale $\int \frac{\tan x}{\sin x - \cos x}dx$. Utilizzando la sostituzione consigliata otteniamo

$$\int \frac{\tan x}{\sin x - \cos x}dx = \int \frac{2t}{1-t^2}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\ dt = 4\int \frac{t}{(1-t^2)(t^2+2t-1)}dt$$

e l'ultimo integrale si potrà risolvere determinando $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t}{(1-t^2)(t^2+2t-1)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{t+1-\sqrt{2}} + \frac{D}{t+1+\sqrt{2}}$$

essendo $t^2+2t-1 = (t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})$.

Alcuni esercizi con integrali della precedente forma

Calcolare i seguenti integralii:

1. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{5x+2}}dx;$
2. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x+1}}{2x+x^2}dx;$
3. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1-\sqrt{2x+1}}dx;$
4. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{x-1}}dx;$
5. $\displaystyle\int x^2\sqrt{\frac{2x}{x+3}}dx;$
6. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{1+2x}dx;$
7. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x(x+1)}}{x^2+1}dx;$
8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+x}{x+\sqrt{2x-1}}dx;$
9. $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{2\sin x-3\cos x}dx;$
10. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x-2\sin^2 x}{(\tan^2 x+1)^2}dx$