LIMITI DI FUNZIONI

Limiti notevoli di funzioni

Dato $b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}}$$

Dato $a > 0$ risulta

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}}$$

e

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}}$$

Limiti coinvolgenti funzioni trigonometriche

Si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1}$$

ed inoltre

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Limiti coinvolgenti funzioni esponenziali e logaritmiche

Per ogni $a > 1$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ risulta

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0}.$$

ed anche

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \ (x_0 > 0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty}.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a}$$

Inoltre

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$$

dove $\log x = \log_e x$. Da cui si deduce che per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}}$$

Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ risulta

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}$$

Infiniti di ordine crescente

Osservato che per ogni $b > 0$ e $a > 1$ risulta

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \log x = \lim_{x\to +\infty} x^b = \lim_{x\to +\infty} a^x = \lim_{x\to +\infty} x^x = +\infty}$$

valgono

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^b} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^x} = 0}$$

La relazione di asintotico ed di "o" piccolo

Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono dette *asintotiche* per $x \to x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, e si scrive $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

In particolare, se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora $f(x) \sim \ell$ per $x \to x_0$.

Sono immediate le seguenti proprietà:

a) $\boxed{\text{Se } f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0 \text{ e } \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ allora } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell.}$

b) $\boxed{\text{Se } f(x) \sim g(x) \text{ e } g(x) \sim h(x) \text{ per } x \to x_0 \text{ allora } f(x) \sim h(x) \text{ per } x \to x_0.}$

c) Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ allora per ogni funzione $h(x)$ si ha

$$\boxed{f(x)h(x) \sim g(x)h(x), \quad \frac{f(x)}{h(x)} \sim \frac{g(x)}{h(x)}, \quad \frac{h(x)}{f(x)} \sim \frac{h(x)}{g(x)} \quad \text{per} \quad x \to x_0.}$$

Dai limiti notevoli visti risulta in particolare che per $x \to 0$ si ha

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \log(1+x) \sim x \quad \text{e} \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, si dice che $f(x)$ è *trascurabile* rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, e si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Osserviamo innazitutto che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1} \iff \boxed{f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0} \iff \boxed{f(x) = g(x) + o(g(x)) \text{ per } x \to x_0}$$

ed anche che se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora $f(x) = \ell + o(1)$ per $x \to x_0$ (dove $o(1)$ sta ad indicare una funzione infinitesima per $x \to x_0$). Dalle precedenti implicazioni e dai limiti notevoli visti, per $x \to 0$ risulta

$$\sin x = x + o(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad \log(1+x) = x + o(x) \quad \text{e} \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

Valgono poi le seguenti proprietà:

i) $\boxed{o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))}$;

ii) $\boxed{k \cdot o(g(x)) = o(k \cdot g(x)) = o(g(x))}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

iii) $\boxed{h(x) \cdot o(g(x)) = o(h(x) \cdot g(x))}$ e $\boxed{o(h(x)) \cdot o(g(x)) = o(h(x) \cdot g(x))}$;

iv) se $f(x) = o(h(x))$ e $h(x) = o(g(x))$ allora $f(x) = o(g(x))$, ovvero $\boxed{o(o(g(x))) = o(g(x))}$;

v) $\boxed{o(g(x) + o(g(x))) = o(g(x))}$;

vi) *Principio di cancellazione dei termini trascurabili:* $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + o(f(x))}{g(x) + o(g(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}$.

Qualche esempio

(1) Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$. Dagli sviluppi notevoli per $x \to 0$, si ha

$$e^x - \cos x = (1 + x + o(x)) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = x + o(x)$$

essendo $x^2 = o(x)$ e quindi $o(x^2) = o(x)$, mentre

$$\sqrt[3]{1+x} - 1 = \frac{1}{3}x + o(x)$$

Allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x)}{\frac{1}{3}x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{3}x} = 3$$

(2) Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1 + \sin^2 x}{\log(1 + \sqrt{x} + x)}$. Ponendo $y = \cos x - 1$, dallo sviluppo di e^y per $y \to 0$ e dallo sviluppo di $\cos x$ per $x \to 0$, otteniamo

$$e^{1-\cos x} - 1 = e^y - 1 = y + o(y) = 1 - \cos x + o(1 - \cos x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

mentre

$$\sin^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$$

da cui

$$e^{1-\cos x} - 1 + \sin^2 x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Inoltre, posto $y = \sqrt{x} + x$, otteniamo

$$\log(1 + \sqrt{x} + x) = \log(1 + y) = y + o(y) = \sqrt{x} + x + o(\sqrt{x} + x) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

essendo $x = o(\sqrt{x})$. Allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1 + \sin^2 x}{\log(1 + \sqrt{x} + x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} = 0$$

Ordine di infinito e di infinitesimo

Preso $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, siano $f(x)$ e $g(x)$ tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

Si dice che $f(x)$ *ha ordine di infinito minore di* $g(x)$ *per* $x \to x_0$ e scriveremo $Ord(f) < Ord(g)$ per $x \to x_0$, se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ ovvero se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Si dice che $f(x)$ *ha ordine di infinito uguale a* $g(x)$ *per* $x \to x_0$ e scriveremo $Ord(f) = Ord(g)$ per $x \to x_0$, se esiste $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $f(x) \sim \ell g(x)$ per $x \to x_0$ ovvero se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Possiamo dare un valore numerico all'ordine di infinito di una funzione confrontandola con gli infiniti campione nel seguente modo

- se $x_0 \in \mathbb{R}$, il campione è $g_b(x) = \frac{1}{|x-x_0|^b}$ con $b > 0$, e si pone $Ord(g_b(x)) = b$. Avremo allora che $f(x)$ ha *ordine di infinito* pari a $b > 0$ per $x \to x_0$, $Ord(f) = b$, se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x-x_0|^b}} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- se $x_0 = \pm\infty$, il campione è $g_b(x) = |x|^b$ con $b > 0$, e si pone $Ord(g_b(x)) = b$. Avremo allora che $f(x)$ ha *ordine di infinito* pari a $b > 0$ per $x \to \pm\infty$, $Ord(f) = b$, se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x|^b} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Si osservi che valgono le seguenti implicazioni

$$\boxed{Ord(f) = b} \Longleftrightarrow \boxed{f(x) \sim \ell g_b(x) \text{ per } x \to x_0} \Longleftrightarrow \boxed{f(x) = \ell g_b(x) + o(g_b(x)) \text{ per } x \to x_0}$$

Siano $f(x)$ e $g(x)$ tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

Si dice che $f(x)$ *ha ordine di infinitesimo minore di* $g(x)$ *per* $x \to x_0$ e scriveremo $ord(f) < ord(g)$ per $x \to x_0$, se $g(x) = o(f(x))$ per $x \to x_0$ ovvero se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Si dice che $f(x)$ *ha ordine di infinitesimo uguale a* $g(x)$ *per* $x \to x_0$ e scriveremo $ord(f) = ord(g)$ per $x \to x_0$, se esiste $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $f(x) \sim \ell g(x)$ per $x \to x_0$ ovvero se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Possiamo dare un valore numerico all'ordine di infinitesimo di una funzione confrontandola con gli infinitesimi campione nel seguente modo

- se $x_0 \in \mathbb{R}$ il campione è $h_b(x) = |x - x_0|^b$ con $b > 0$, e si pone $ord(h_b(x)) = b$. Avremo allora che $f(x)$ ha *ordine di infinitesimo* pari a $b > 0$ per $x \to x_0$, $ord(f) = b$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|x - x_0|^b} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- se $x_0 = \pm\infty$, il campione è $h_b(x) = \frac{1}{|x|^b}$con $b > 0$, e si pone $ord(h_b(x)) = b$. Avremo allora che $f(x)$ ha *ordine di infinitesimo* pari a $b > 0$ per $x \to \pm\infty$, $ord(f) = b$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x|^b}} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Valgono le seguenti implicazioni

$$\boxed{ord(f) = b} \iff \boxed{f(x) \sim \ell h_b(x) \text{ per } x \to x_0} \iff \boxed{f(x) = \ell h_b(x) + o(h_b(x)) \text{ per } x \to x_0}$$

Qualche esempio

(1) Determinare il comportamento della funzione $f(x) = \frac{\log x}{1 - \cos(x^3)}$ per $x \to 0^+$.

Poichè $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$ e $\lim_{x \to 0} 1 - \cos(x^3) = 0$, abbiamo che $f(x)$ è un infinito per $x \to 0^+$. Vediamo di determinarne l'ordine.
Essendo $1 - \cos y \sim \frac{y^2}{2}$ per $y \to 0$, abbiamo che

$$f(x) = \frac{\log x}{1 - \cos(x^3)} \sim \frac{\log x}{\frac{1}{2}x^6}$$

per $x \to 0^+$. Allora

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{x^6}{2x^b}} = -2 \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^{b-6}}} = -2 \lim_{y \to +\infty} \frac{\log y}{y^{b-6}} = \begin{cases} 0 & \text{se } b > 6 \\ -\infty & \text{se } b \leq 6 \end{cases}$$

da cui deduciamo che per $x \to 0^+$ si ha $Ord(f) < b$ per ogni $b > 6$ e quindi che $Ord(f) < 6$.

(2) Data la funzione $f(x) = e^{1-\cos x} - \sqrt{1+x^2}$, provare che per $x \to 0$ si ha $ord(f) > 2$.

Essendo $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y)$ per $y \to 0$, ponendo $y = x^2$ otteniamo che

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Essendo $y = 1 - \cos x \to 0$ per $x \to 0$, dallo sviluppo di e^y per $y \to 0$ otteniamo

$$e^{1-\cos x} = 1 + (1 - \cos x) + o(1 - \cos x)$$

Ora abbiamo che

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

e quindi, utilizzando le proprietà di "o" piccolo si ottiene

$$e^{1-\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Quindi

$$f(x) = e^{1-\cos x} - \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{1}{2}x^2 - o(x^2) = o(x^2)$$

e dunque, dalla definizione, $ord(f) > 2$.

(3) Determinare il comportamento di $f(x) = \sin(\dfrac{\pi x}{x+1})$ per $x \to -\infty$.

Osserviamo innanzitutto che per $x \to -\infty$ si ha $\frac{\pi x}{x+1} \to \pi$ e dunque che $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{x+1}) \to \sin \pi = 0$ (per la continuità di $\sin x$), quindi la funzione è un infinitesimo per $x \to -\infty$. Posto $y = \pi - \frac{\pi x}{x+1}$ otteniamo che $y \to 0$ per $x \to -\infty$. Poichè $\sin y = \sin(\pi - \frac{\pi x}{x+1}) = \sin(\frac{\pi x}{x+1})$ e $\sin y \sim y$ per $y \to 0$, per $x \to -\infty$ si ottiene che

$$f(x) = \sin(\frac{\pi x}{x+1}) \sim \pi - \frac{\pi x}{x+1} = \frac{\pi}{x+1} \sim \frac{\pi}{x}$$

Ne segue che $ord(f) = 1$ ed anche che $f(x) = \frac{\pi}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \to -\infty$.

(4) Determinare il comportamento di $f(x) = (x + \sin(x^2))^2 - x^2$ per $x \to 0$.

La funzione è infinitesima per $x \to 0$. Poichè $\sin y = y + o(y)$ per $y \to 0$, per $x \to 0$ otteniamo $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Dunque

$$\begin{aligned}(x + \sin(x^2))^2 &= (x + x^2 + o(x^2))^2 = (x + x^2)^2 + 2(x + x^2)o(x^2) + o(x^2)o(x^2) \\ &= x^2 + 2x^3 + x^4 + o(x^3) + o(x^4) + o(x^4) = x^2 + 2x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

essendo $x^4 = o(x^3)$ e quindi $o(x^4) = o(x^3)$. Allora

$$(x + \sin(x^2))^2 - x^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3) - x^2 = 2x^3 + o(x^3).$$

Ne segue che $ord(f) = 3$ e che $f(x) \sim 2x^3$.

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-1}{x^2}$ $[-\frac{1}{2}]$
2. $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ $[1]$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(1+2^x)}{x^2}$ $[0]$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_2(x+\log_2 x)}{\log_2 x}$ $[1]$
5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{\sin x}$ $[+\infty]$
6. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{x^5+2x+1}}$ $[0]$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\tan^2 x)+x^5}{\sqrt[5]{x^4+1}-1}$ $[\frac{5}{2}]$
8. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{2\sqrt[3]{x}+x^2+3x^3}$ $[0]$
9. $\lim_{x\to 3^+} (x-3)^{1-\cos(x-3)}$ $[1]$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+e^x}{2x^3+\log(x^2)}$ $[0]$
11. $\lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)\log(1+\frac{1}{x})}{x}$ $[0]$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan^3 x}-1}{\cos x - e^{x^2}}$ $[0]$
13. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_2(e^x+1)}{x+\sin x}$ $[\log_2 e]$
14. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sin(e^{-x}\sin x)}{x}$ $[1]$
15. $\lim_{x\to +\infty} x\sin(\sqrt{1+x^2}-x)$ $[\frac{1}{2}]$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x}$ $[\frac{\pi}{2}]$
17. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ $[\frac{1}{2}]$
18. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{2+x^3}-\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}$ $[-\infty]$

Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \tan x}{x^\alpha}$ $[0$ se $\alpha < 3$, $-\frac{1}{2}$ se $\alpha = 3$ e $+\infty$ se $\alpha > 3]$
2. $\lim_{x\to 1^+} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{(x-1)^\alpha}$
   $[0$ se $\alpha < 1$, $-\frac{\pi}{2}$ se $\alpha = 1$ e $+\infty$ se $\alpha > 1]$
3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{(x\sin\frac{1}{x^2})^3}{x^\alpha}$
   $[0$ se $\alpha < 3$, non esiste per $\alpha \geq 3]$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^2+2x^3}{\log(\cos x)}$
   $[-2\alpha$ per ogni $\alpha]$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x^3)}{\log(\sqrt[3]{1+x^3})}$
   $[3\alpha$ per ogni $\alpha]$
6. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^{\frac{1}{\alpha}}-1}, \quad \alpha \neq 0$
   $[\alpha$ per ogni $\alpha]$
7. $\lim_{x\to +\infty} x\sin((1+x^2)^\alpha - x),$
   $[\alpha$ per ogni $\alpha]$
8. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-e^{-x}}{x^\alpha}$
   $[0$ se $\alpha < 1$, 1 se $\alpha = 1$ e $+\infty$ se $\alpha > 1]$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1-x}}{\arcsin x}$
   $[\alpha + \frac{1}{2}$ per ogni $\alpha]$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{(x+\sin(x^2))^\alpha - x^\alpha}{x^3}, \quad \alpha \neq 0$
   $[2$ se $\alpha = 2$, 0 se $\alpha > 2$ e $\mathrm{sgn}(\alpha)\infty$ se $\alpha < 2]$