FUNZIONI DIFFERENZIABILI

DEF. Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. $f(x)$ si dice *differenziabile* nel punto $x_0 \in I$ se esiste una costante $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per} \quad x \to x_0.$$

In tal caso la funzione lineare $\varphi(h) = A \cdot h$, $h \in \mathbb{R}$, è detta *differenziale* di f in x_0 e viene denotata con $df(x_0)$.

Il concetto di funzione differenziabile è strettamente legato al concetto di funzione derivabile. Abbiamo difatti il seguente risultato

TEOREMA del differenziale
Una funzione $f(x)$ è differenziabile nel punto $x_0 \in I$ se e solo se è derivabile in x_0 e $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

DIM. Se $f(x)$ è derivabile in x_0 allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Ricordando la definizione di o piccolo, per $x \to x_0$ possiamo scrivere

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

e dunque

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Segue che f risulta differenziabile in x_0 con $df(x_0)h = f'(x_0)h$.
Viceversa, se $f(x)$ risulta differenziabile in x_0, esiste una costante $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per} \quad x \to x_0.$$

Allora, dalla definizione di o piccolo si ottiene

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{A(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} A + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = A$$

Ne segue che f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = A$. $\square$

In particolare si ottiene che se $f(x)$ è derivabile in x_0 vale la seguente formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad \text{per} \quad x \to x_0,$$

detta *formula degli incrementi finiti*. Tale formula può essere letta dicendo che la funzione $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, che ha per grafico la retta tangente al grafico di $f(x)$ in x_0, approssima $f(x)$ a meno di un errore trascurabile rispetto a $x - x_0$.

Teorema di derivazione della funzione composta.

Sia $f(x)$ funzione derivabile nel punto $x_0 \in I$ e sia $g(y)$ funzione derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta $gof(x)$ risulta derivabile in x_0 con

$$(fog)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Dim. Poichè $f(x)$ risulta derivabile in x_0, per $x \to x_0$ abbiamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Analogalmente, essendo $g(y)$ derivabile in y_0, per $y \to y_0$ abbiamo

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0).$$

Osservato che, essendo $f(x)$ continua in x_0, risulta $f(x) \to f(x_0) = y_0$ per $x \to x_0$, dai precedenti sviluppi e dalle proprietá di $''o``$ piccolo otteniamo che per $x \to x_0$ si ha

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'((f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(f(x) - f(x_0)) \\ &= g(f(x_0)) + g'((f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \\ &= g(f(x_0)) + g'((f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

Dal Teorema del differenziale otteniamo allora che la funzione $gof(x)$ risulta derivabile in x_0 con $(gof)'(x_0) = g'((f(x_0))f'(x_0)$. $\square$