

Alcune note introduttive alle serie di Fourier.

DEFINIZIONE. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $2\pi^1$ e integrabile² su $[-\pi, \pi]$. Diremo coefficienti di Fourier di f i numeri reali

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

e serie di Fourier di f la serie di funzioni

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

NOTA 1. Essendo f periodica di periodo 2π e integrabile su $[-\pi, \pi]$ allora risulta integrabile su ogni intervallo $[x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$. Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su $\mathbb{R}$ allora la funzione $f(x)g(x)$ è integrabile su ogni intervallo $[x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$. In particolare risultano ben definiti i coefficienti di Fourier di f .

DISEGUAGLIANZA DI BESSEL. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e integrabile su $[-\pi, \pi]$. Considerata la somma parziale n -esima della serie di Fourier

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ che

$$(1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right],$$

da cui discende la seguente disuguaglianza, nota come disuguaglianza di Bessel:

$$(2) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

OSSERVAZIONE 1. La (2) discende direttamente dalla (1) che implica infatti che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

La disuguaglianza di Bessel si ottiene come limite per $n \rightarrow +\infty$ della disuguaglianza precedente.

OSSERVAZIONE 2. Dalla disuguaglianza di Bessel otteniamo che $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty$ da cui segue che $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0$. Il risultato è noto (sotto ipotesi in realtà meno

¹Sarà possibile passare al caso di periodo $T > 0$ tramite dilatazioni

²Intendiamo l'integrabilità alla Riemann. Si noti che la teoria delle serie di Fourier si estende ad ambiti più generali

restrittive) come LEMMA DI RIEMANN LEBESGUE: se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo 2π e integrabile su $[-\pi, \pi]$ allora

$$(3) \quad \lim_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0.$$

DIMOSTRAZIONE DI (1): Chiaramente

$$(4) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 dx.$$

Visto che $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ e ricordando la definizione dei coefficienti di Fourier di f , otteniamo direttamente che³

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \frac{a_0}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx a_k + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx b_k \right) \\ &= 2 \frac{a_0^2}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (\pi a_k^2 + \pi b_k^2) = a_0^2 + 2 \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)^2 dx \\ &= \frac{a_0^2}{2} + 2a_0 \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) dx \right]^{[=0]} + \\ &\quad + \sum_{k,j=1}^n a_k a_j \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(jx) dx \right]^{[=\delta_{k,j}]} + \\ &\quad + \sum_{k,j=1}^n a_k b_j \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(jx) dx \right]^{[=0]} + \sum_{k,j=1}^n b_k b_j \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(jx) dx \right]^{[=\delta_{k,j}]} \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \end{aligned}$$

da cui la (4) ci permette di concludere come si voleva che

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad \#$$

³Si sfruttano le uguaglianze (anche note come *formule di Werner*) $\cos(kx) \sin(jx) = \frac{1}{2}(\sin(k+j)x + \sin(j-k)x)$, $\sin(kx) \sin(jx) = \frac{1}{2}(\cos(k-j)x - \cos(k+j)x)$, $\cos(kx) \cos(jx) = \frac{1}{2}(\cos(k+j)x + \cos(j-k)x)$. Introdotta la *delta* di Kronecker $\delta_{k,j} \equiv \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$, otteniamo allora

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(jx) dx &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{k+j} \cos(k+j)x + \frac{1}{-k+j} \cos(-k+j)x \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{se } k \neq j \\ \left[-\frac{1}{4k} \cos(2kx) \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{se } k = j, \end{cases} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(jx) dx &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k-j} \sin(k-j)x - \frac{1}{k+j} \sin(k+j)x \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{se } k \neq j \\ \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2kx) \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{se } k = j, \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ \pi & \text{se } k = j, \end{cases} = \pi \delta_{k,j} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(jx) dx &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k-j} \sin(k-j)x + \frac{1}{k+j} \sin(k+j)x \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{se } k \neq j \\ \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4k} \sin(2kx) \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{se } k = j, \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ \pi & \text{se } k = j, \end{cases} = \pi \delta_{k,j}. \end{aligned}$$

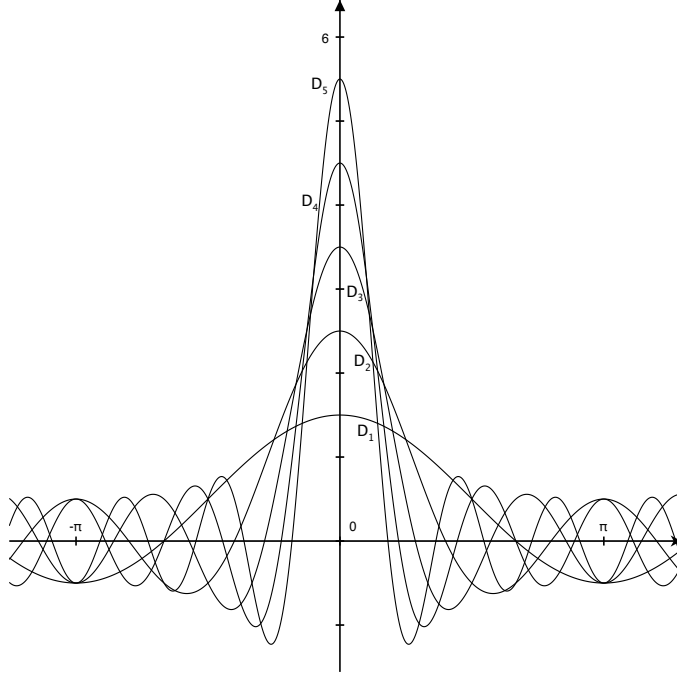


Figure 1: Nuclei di Dirichelet $D_1, \dots, D_5$

DEFINIZIONE. Dato $n \in \mathbb{N}$ si pone

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione D_n viene detta Nucleo di Dirichelet (vedi figura 1).

LEMMA 1. Dato $n \in \mathbb{N}$ si ha che $D_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, pari, periodica di periodo 2π e tale che

$$(5) \quad \int_{-\pi}^0 D_n(x) dx = \int_0^{\pi} D_n(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Inoltre

$$(6) \quad D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})} & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \\ n + \frac{1}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Come somma di funzioni continue, pari e periodiche di periodo 2π , anche il nucleo di Dirichelet gode delle stesse proprietà. Notiamo inoltre che, essendo $\sin(k\pi) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha anche che $\int_0^{\pi} D_n(x) dx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n [\frac{\sin(kx)}{k}]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

Si osservi ora che dalla formula di addizione otteniamo che per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\sin((k + \frac{1}{2})x) - \sin((k - \frac{1}{2})x) = 2 \cos(kx) \sin(\frac{x}{2}).$$

Sommando tale uguaglianza per $k \in \{1, \dots, n\}$ otteniamo che se $x \neq 0$ allora

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})} \left[\sum_{k=1}^n \sin((k + \frac{1}{2})x) - \sin((k - \frac{1}{2})x) \right]^{[=\text{somma telescopica}]} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})} [\sin((n + \frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2})] = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}. \quad \# \end{aligned}$$

LEMMA 2. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo 2π e integrabile su $[-\pi, \pi]$ allora la somma parziale n -esima della sua serie di Fourier è data da

$$(7) \quad s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordando la definizione dei coefficienti di Fourier di f (che denotiamo ancora a_0, a_k, b_k) otteniamo

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(ky) \cos(kx) + \sin(ky) \sin(kx)) \right] dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(y-x)) \right] dy \stackrel{[t=y-x]}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(x+t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Il Lemma segue allora dal fatto che la funzione $x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x+t) D_n(t) \in \mathbb{R}$ è periodica di periodo 2π e dunque

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(x+t) D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt^4. \quad \#$$

DEFINIZIONE. Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$, denoteremo, qualora siano definiti in $\mathbb{R}$, $f(x_0^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$. Si dice che f è C^1 (risp. continua) a tratti su (a, b) qualora esista una partizione $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ per la quale risulti che f è derivabile con derivata continua (risp. continua) su (x_{i-1}, x_i) ed $\exists f'(x_{i-1}^+), f'(x_i^-)$ (risp. $\exists f(x_{i-1}^+), f(x_i^-)$) per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua o C^1 a tratti su ogni intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ diremo che lo è su $\mathbb{R}$.

NOTA 2. Notiamo che se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua a tratti su (a, b) allora è integrabile su ogni intervallo $[x_0, x_1] \subset (a, b)$ (se è C^1 a tratti su (a, b) allora risulta anche continua a tratti su (a, b)).

TEOREMA. (Convergenza puntuale della serie di Fourier) Se f è periodica e C^1 a tratti su $\mathbb{R}$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge alla semisomma $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$. In particolare se f è periodica, C^1 a tratti su $\mathbb{R}$ e continua in x_0 allora $s_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ per $n \rightarrow +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Per via della (5) del Lemma 1 vale che

$$f(x_+) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_+) D_n(x) dx \quad \text{e} \quad f(x_-) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_-) D_n(x) dx.$$

⁴Tale affermazione segue dal seguente risultato generale: Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo $T > 0$ e integrabile su $[0, T]$ allora $\int_a^{a+T} g(t) dt = \int_b^{b+T} g(t) dt$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Infatti mostriamo che $\int_a^{a+T} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Poniamo $[\frac{a}{T}] = \max\{j \in \mathbb{Z} / j \leq \frac{a}{T}\}$ (la parte intera di $\frac{a}{T}$) e notiamo che $\int_a^{a+T} g(t) dt \stackrel{[periodicità]'}{=} \int_a^{a+T} g(t + [\frac{a}{T}]T) dt \stackrel{[y=t+[\frac{a}{T}]T]}{=} \int_{(\frac{a}{T}-[\frac{a}{T}])T}^{T+(\frac{a}{T}-[\frac{a}{T}])T} g(y) dy = \int_{(\frac{a}{T}-[\frac{a}{T}])T}^T g(y) dy + \int_T^{T+(\frac{a}{T}-[\frac{a}{T}])T} g(y) dy \stackrel{[periodicità]'}{=} \int_{(\frac{a}{T}-[\frac{a}{T}])T}^T g(y) dy + \int_T^{T+(\frac{a}{T}-[\frac{a}{T}])T} g(y-T) dy \stackrel{[t=y-T]}{=} \int_{(\frac{a}{T}-[\frac{a}{T}])T}^T g(y) dy + \int_0^{(\frac{a}{T}-[\frac{a}{T}])T} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt.$

Dalla (6) del Lemma 1 e dalla (7) del Lemma 2 segue allora che

$$\begin{aligned}
s_n(x) - \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)] &= \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_+) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_-) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sin((n+\frac{1}{2})t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x_-)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sin((n+\frac{1}{2})t) dt.
\end{aligned}$$

Definita $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che F risulti periodica di periodo 2π e

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x_+)}{2 \sin(\frac{t}{2})} & 0 < t \leq \pi, \\ 0 & t = 0, \\ \frac{f(x+t)-f(x_-)}{2 \sin(\frac{t}{2})} & -\pi \leq t < 0, \end{cases}$$

l'uguaglianza sopra determinata si scrive in forma più compatta come segue

$$\begin{aligned}
s_n(x) - \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \\
(8) \qquad \qquad \qquad &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(\frac{1}{2}t) \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin(\frac{1}{2}t) \sin(nt) dt.
\end{aligned}$$

Notiamo che visto che f è C^1 a tratti su $\mathbb{R}$ e quindi esistono $f'(0^\pm)$, dal teorema di De L'Hôpital deduciamo che esistono anche $F(0^\pm) = f'(0^\pm)$. L'esistenza di $F(0^\pm)$ e il fatto che f è C^1 a tratti (e quindi continua a tratti) su $\mathbb{R}$ implicano che F è continua a tratti su $\mathbb{R}$.⁵ Essendo F essendo continua a tratti su $\mathbb{R}$, risultano continue a tratti su $\mathbb{R}$, e quindi integrabili su $[-\pi, \pi]$, anche le funzioni $F_1(t) = F(t) \cos(\frac{1}{2}t)$ e $F_2(t) = F(t) \sin(\frac{1}{2}t)$. Possiamo allora utilizzare il Lemma di Riemann Lebesgue per concludere che

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(t) \sin(nt) dt \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_2(t) \sin(nt) dt \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

da cui per la (8) segue come si voleva che $s_n(x) - \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)] \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. #

COROLLARIO. (*Integrale termine a termine della serie di Fourier*) Se f è periodica di periodo 2π e continua a tratti su $\mathbb{R}$, detti a_0, a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier, se $[\sigma, \tau] \subset [-\pi, \pi]$ si ha

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) dt = \frac{a_0}{2}(\tau - \sigma) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \int_{\sigma}^{\tau} \cos(kt) dt + b_k \int_{\sigma}^{\tau} \sin(kt) dt \right].$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) - \frac{a_0}{2} dt$ per $x \in \mathbb{R}$ notando che F risulta continua su $\mathbb{R}$ e derivabile con derivata $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ in tutti i punti in cui f risulta continua.

⁵Essendo f continua a tratti su $\mathbb{R}$ esiste una partizione $x_0 = -\pi < x_1 < \dots < x_{\bar{k}} = 0 < \dots < x_n = \pi$ per la quale f risulta continua su (x_{j-1}, x_j) esistendo $f(x_j^\pm)$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$. Otteniamo allora che anche F è continua su ogni intervallino (x_{j-1}, x_j) essendo il rapporto tra funzioni continue non nulle. Se inoltre

$j \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $j \neq \bar{k}$ allora visto che $\sin(\frac{x_j}{2}) \neq 0$, esiste $F(x_j^\pm) = \begin{cases} \frac{f(x_j^\pm) - f(x_+)}{\sin(\frac{x_j}{2})} & j > \bar{k} \\ \frac{f(x_j^\pm) - f(x_-)}{\sin(\frac{x_j}{2})} & j < \bar{k} \end{cases}$. Visto che esistono

$F(0^\pm) = F(x_{\bar{k}}^\pm)$ concludiamo che F è continua su (x_{j-1}, x_j) ed esistono $F(x_j^\pm)$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ ed essendo F periodica di periodo 2π , risulta che F è continua a tratti su $\mathbb{R}$.

Essendo f continua a tratti su $\mathbb{R}$ esiste una partizione $x_0 = -\pi < x_1 < \dots < x_n = \pi$ per la quale f risulta continua su (x_{j-1}, x_j) esistendo $f(x_j^\pm)$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$. Otteniamo allora che anche F è derivabile con derivata uguale a $f(t) - \frac{a_0}{2}$ su (x_{j-1}, x_j) esistendo $F'(x_j^\pm)$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ e risultando dunque che F è C^1 a tratti su $(-\pi, \pi)$. Notiamo ora che dalla definizione di a_0 segue che $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) - \frac{a_0}{2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \pi a_0 = 0$ e visto che f è periodica di periodo 2π otteniamo

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) - \frac{a_0}{2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) - \frac{a_0}{2} dt = 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$

cioè F è anch'essa periodica di periodo 2π . Essendo F periodica di periodo 2π e C^1 a tratti su $(-\pi, \pi)$ risulta C^1 a tratti su $\mathbb{R}$.

Dal Teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier deduciamo che posto

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(kx) dx \quad \text{e} \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(kx) dx,$$

si ha

$$(9) \quad F(x) - \frac{\alpha_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Integrando per parti su ogni intervallo $[x_{j-1}, x_j]$, ricordando che $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ su (x_{j-1}, x_j) otteniamo l'identità

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x) \cos(kx) dx = [F(x) \frac{\sin(kx)}{k}]_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \frac{\sin(kx)}{k} dx - \frac{a_0}{2k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(kx) dx.$$

Sommando per $j \in \{1, \dots, n\}$ otteniamo allora per additività dell'integrale che

$$\pi \alpha_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(kx) dx = [F(x) \frac{\sin(kx)}{k}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0 \sin(kx)}{2k} dx = -\frac{\pi}{k} b_k.$$

Ciò mostra che $\alpha_k = -\frac{1}{k} b_k$ e in modo del tutto analogo si deriva anche che $\beta_k = \frac{1}{k} a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Utilizzando tali relazioni unitamente alla (9) concludiamo che se $[\sigma, \tau] \subset [-\pi, \pi]$ allora

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) - \frac{a_0}{2} dt &= F(\tau) - F(\sigma) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\cos(k\tau) - \cos(k\sigma)) + \beta_k (\sin(k\tau) - \sin(k\sigma)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(-\frac{\cos(k\tau) - \cos(k\sigma)}{k} \right) + a_k \left(\frac{\sin(k\tau) - \sin(k\sigma)}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{\sigma}^{\tau} \sin(kx) dx + a_k \int_{\sigma}^{\tau} \cos(kx) dx. \quad \# \end{aligned}$$

ESEMPIO 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e tale che $f(x) = |x|$ per $x \in [-\pi, \pi]$.

La funzione risulta continua su $\mathbb{R}$ e C^1 a tratti su $\mathbb{R}$. Dal Teorema di convergenza puntuale la sua serie di Fourier converge a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per calcolare i suoi coefficienti di Fourier

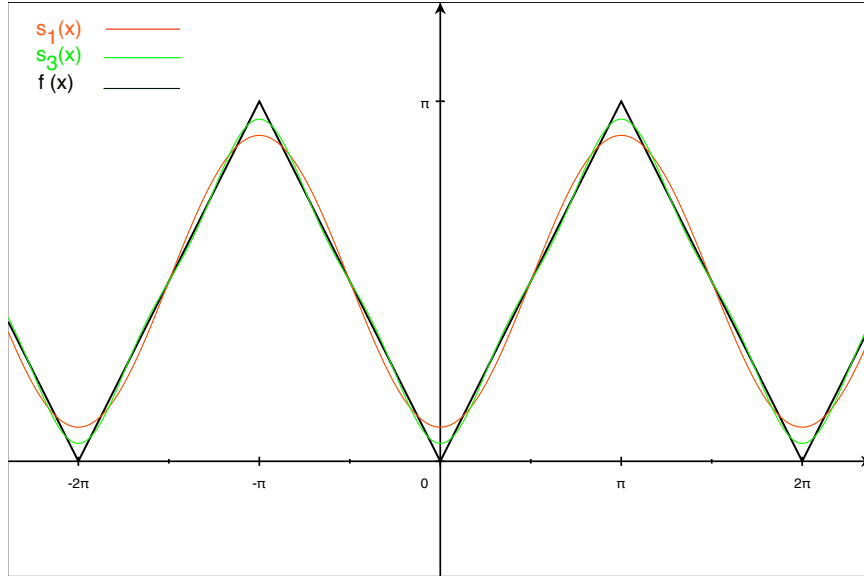


Figure 2: La funzione $f(x)$ e le sue somme di Fourier $s_1(x)$ e $s_3(x)$

notiamo antitutto che essendo f una funzione pari allora i coefficienti b_k si annullano⁶. Per quanto riguarda gli a_k si ha⁷

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx \\ &= -\frac{2}{k\pi} \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{k^2\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari,} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & k \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dal Teorema di convergenza puntuale deriviamo dunque che

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In particolare per $x = 0$ vale che $f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ e ciò ci permette di determinare

⁶In generale una funzione dispari ha integrale nullo su ogni intervallo simmetrico rispetto all'origine. Infatti se $\psi(x) = -\psi(-x)$ allora

$$\int_{-a}^a \psi(x) dx \stackrel{[t=-x]}{=} \int_a^{-a} -\psi(-t) dt \stackrel{[disparita']}{=} \int_a^{-a} \psi(t) dt = - \int_{-a}^a \psi(t) dt.$$

Se dunque f è una funzione pari, risultando $f(x) \sin(kx)$ dispari, si ha $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Analogamente se f è una funzione dispari, risultando $f(x) \cos(kx)$ dispari, allora $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0$.

⁷Si noti che se ψ è una funzione pari su un intervallo $[-a, a]$ allora

$$\int_{-a}^a \psi(x) dx = \int_{-a}^0 \psi(x) dx + \int_0^a \psi(x) dx = - \int_a^0 \psi(-t) dt + \int_0^a \psi(x) dx = \int_0^a \psi(-x) + \psi(x) dx = 2 \int_0^a \psi(x) dx.$$

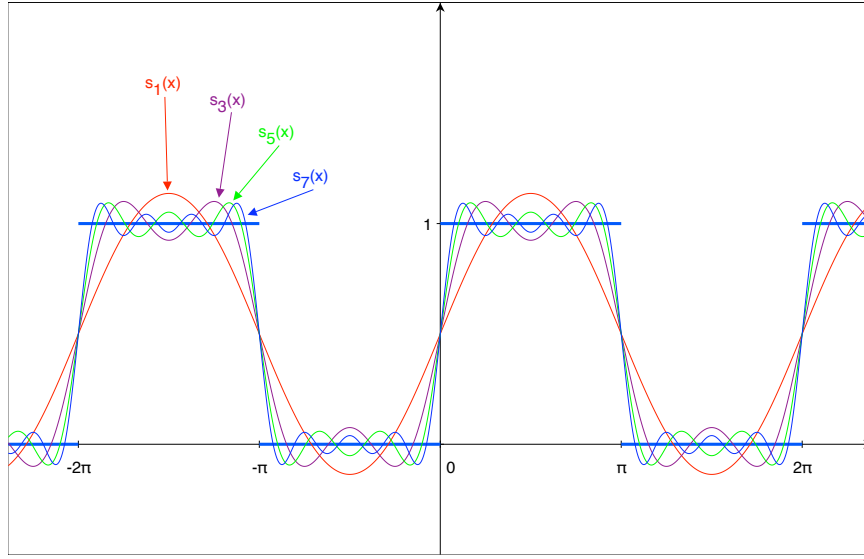


Figure 3: La funzione $f(x)$ e le sue somme di Fourier $s_1(x)$, $s_3(x)$, $s_5(x)$, $s_7(x)$

la somma dei reciproci dei quadrati dei numeri dispari:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

In figura 2 è riportato il grafico di $f(x)$ insieme a quello delle prime ridotte $s_1(x)$ e $s_3(x)$ della sua serie di Fourier.

ESEMPIO 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

La funzione risulta C^1 a tratti su $\mathbb{R}$ e dal Teorema di convergenza puntuale la sua serie di Fourier converge a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ove f risulti continua cioè per tutti gli $x \in \mathbb{R} \setminus \pi Z$ ($\pi Z = \{\pi k / k \in \mathbb{Z}\}$). Se $x \in \pi Z$ allora essendo f non continua la sua serie di Fourier tende $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2}$. Per quanto riguarda i suoi coefficienti di Fourier si ha

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = 1, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ pari,} \\ -\frac{2}{k\pi} & k \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

da cui otteniamo che

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi Z.$$

In particolare per $x = \frac{\pi}{2}$ otteniamo che $f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)}$ da cui $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} = \arctan(1)$. Si noti che essendo $\sin(j\pi) = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ allora si ha che $s_n(k\pi) = \frac{1}{2}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.