# Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica
# Anno Accademico 2009/2010
# Teoria delle Decisioni

Nome ..................................................

N. Matricola .................................................. Ancona, 17 giugno 2010

1. (7 punti) Introdurre la definizione di legge gamma e discuterne le proprietà più importanti.

2. (7 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema del Limite Centrale.

3. (8 punti) Gli studenti che si presentano ad un esame dimenticano, ciascuno ed indipendentemente, di scrivere il proprio nome sul compito con probabilità $p = 1/100$. Su un gruppo di 200 studenti,

   (i) Qual'è la probabilità che nessun compito sia senza nome?

   (ii) Qual' è la probabilità che vi siano più di 2 compiti senza nome? Cosa darebbero l'approssimazione di Poisson e l'approssimazione normale per questa probabilità? È giustificato il loro uso in questo caso?

4. (8 punti) Siano $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ v.a. continue indipendenti di legge uniforme sull'intervallo $[0, 1]$. Determinare funzione di ripartizione e densità delle variabili $Y$ e $Z$ definite come

$$Y = min(X_1, X_2, ..., X_n)$$
$$Z = max(X_1, X_2, ..., X_n).$$

   Dimostrare quindi che $Z$ ed $1 - Y$ hanno la stessa legge, ed infine calcolare $E[Y]$ ed $E[Z]$.

③ $X =$ numero stud. che non mettono il nome

$X \sim B(n,p)$ con $n=200$ e $p=\frac{1}{100}$

(i) $P[X=0] = (1-p)^n = \left(1-\frac{1}{100}\right)^{200} \approx 0.134$

(ii) $P[X>2] = P[X \geq 3] = 1 - P[X=0] - P[X=1] - P[X=2] =$

$= 1 - (1-p)^n - \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} - \binom{n}{2} p^2(1-p)^{n-2} \approx 0.323$

Poisson: $B(n,p) \approx p(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ $\quad \lambda = np = 2$

$P[X \geq 3] \approx 1 - e^{-\lambda}(1+2+2) = 0.323$ bene!

Normale: $P[X \geq 3] = 1 - \Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{200 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100}}}\right) \approx 0.64$ non buona

(criterio $np \gtrsim 5$ non valido)

④ $F_Y(t) = P[Y \leq t] = 1 - P[Y \geq t] = 1 - P[X_1 \geq t, X_2 \geq t, \ldots, X_n \geq t]$

$= 1 - (1-t)^n$

$F_Z(t) = P[Z \leq t] = P[X_1 \leq t, X_2 \leq t, \ldots, X_n \leq t] = t^n$

$f_Y(t) = F_Y'(t) = n(1-t)^{n-1}$ $\quad f_Z(t) = nt^{n-1}$

$F_{1-Y}(t) = P[1-Y \leq t] = P[Y \geq 1-t] = 1 - P[Y \leq 1-t] =$

$= 1 - F_Y(1-t) = 1 - \{1 - (1-1+t)^n\} = t^n = F_Z(t)$

$E[Y] = \int_0^1 t f_Y(t)\,dt = \frac{1}{n+1}$

$E[Z] = \int_0^1 t f_Z(t)\,dt = \frac{n}{n+1}$