Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2009/2010
Teoria delle Decisioni

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 26 febbraio 2010

1. (7 punti) Introdurre la definizione di densità condizionale, densità congiunta e densità marginale per una variabile aleatoria vettoriale bidimensionale e specificarne la relazione nel caso di variabili dipendenti ed indipendenti. Calcolare quindi la legge della variabile $X + Y$, se la legge congiunta della variabile (X, Y) è $f(x, y)$.

2. (7 punti) Enunciare e dimostrare la formula di Bayes in uno spazio di probabilità.

3. (8 punti) Sia X una variabile aleatoria di densità

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\, t^{\lambda-1}, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

   dove $\lambda > 0$.

   (i) Calcolare la funzione di ripartizione di X;

   (ii) calcolare la legge della variabile aleatoria $Y = -\ln X$;

   (iii) calcolare media e varianza di X.

4. (8 punti) Una moneta equilibrata viene lanciata più volte. Qual'è la probabilità che allo n-esimo lancio

   (i) si abbia testa per la prima volta?

   (ii) Si sia già avuto testa almeno una volta?

   (iii) Si siano avute esattamente due teste?

   (iv) Si siano avute almeno due teste?

   (v) Si siano avuti esattamente lo stesso numero di teste e di croci (supponendo n pari)?

Soluzioni:

3) $f(t) = \begin{cases} \lambda t^{\lambda-1}, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \lambda > 0$

(i) $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt = \lambda \int_0^x t^{\lambda-1}\,dt = t^{\lambda}\Big|_0^x = x^{\lambda},$ per $0 < x < 1$

$F_X(x) = 0$ per $x \leq 0$ $\qquad F_X(x) = 1$ per $x \geq 1$

(ii) $Y = -\ln X$. Per $y > 0$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y) = P(X \geq e^{-y}) = 1 - P(X \leq e^{-y}) =$

$= 1 - e^{-\lambda y}$. Per $y \leq 0$ $F_Y(y) = 0$

(iii) $E(X) = \int_0^1 t\, f(t)\,dt = \lambda \int_0^1 t\, t^{\lambda-1}\,dt = \frac{\lambda}{\lambda+1}$

$E(X^2) = \lambda \int_0^1 t^2 t^{\lambda-1}\,dt = \frac{\lambda}{\lambda+2}$ $\qquad Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$

$= \boxed{\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2(\lambda+2)}}$

---

4) S = primo istante con T

X = numero T nei primi n lanci

Usando la (2.6) e (2.7) del testo $\qquad S \sim p(1-p)^{k-1}$

$X \sim \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(i) $P(S=n) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

(ii) $P(S \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(iii) $P(X=2) = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(iv) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n (1+n)$

(v) Poniamo $n = 2m$. $P(X=m) = \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$