Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2009/2010
Teoria delle Decisioni

Nome ....

N. Matricola ....

Ancona, 26 febbraio 2010

1. (7 punti) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Tchebyshev.

2. (7 punti) Enunciare e dimostrare la Legge dei Grandi Numeri.

3. (8 punti) La legge individuata dalla densità

$$f(t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |t|}$$

è detta *Legge di Laplace* di parametro λ.

   (i) Mostrare che f è una densità di probabilità;

   (ii) calcolare media e varianza della legge di Laplace;

   (iii) Se X è una variabile aleatoria con legge di Laplace di parametro λ, quali sono le leggi delle variabili αX e $|X|$?

4. (8 punti) In una schedina del totocalcio a 13 partite i tre simboli 1, X e 2 compaiono con probabilità 0.46, 0.28 e 0.26 rispettivamente. Calcolare la probabilità che in una schedina

   (i) il 2 compaia più di 3 volte;

   (ii) il simbolo X non compaia mai.

Soluzioni

3) $f(t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |t|}$

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda |t|}\,dt =$

$$= \frac{\lambda}{2}\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dt = 1$$

(ii) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda|x|}\,dx = 0$

$$E(X^2) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x|}\,dx = \lambda\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \lambda\left\{ \cancel{\left[x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty}} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x}\,dx \right\} =$$

$$= 2\cancel{\left[x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty}} + \frac{1}{\lambda}2\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2} = Var(X)$$

(iii) $Y = \alpha x$; $P(Y \le y) = P(\alpha X \le y) = P\left(X \le \frac{y}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{y}{\alpha}\right)$

$(\alpha > 0)$ $\quad g(y) = \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}|y|}$ $\quad$ (risulta $\frac{\lambda}{|\alpha|} e^{-\lambda|y|/|\alpha|}$ per $\alpha < 0$)

$Y = |X|$; $P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) =$

$$= \int_{-y}^{y} f(t)\,dt = 2\int_0^{y} f(t)\,dt = 2\frac{\lambda}{2}\int_0^{y} e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda y} \circledast$$

$\circledast$ $g(y) = \lambda e^{-\lambda y}$

---

4) $Y = \#$ di "2" in una colonna vincente $\quad Y \sim B(13, p) \quad p = 0.26$

(i) $P(Y > 3) = P(Y \ge 4) = \sum_{k=4}^{13} \binom{13}{k} p^k (1-p)^{13-k} =$

$= $ (per comodità di calcolo) $= 1 - P(Y \le 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3}\binom{13}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx$

≈ 0.45

(ii) $Z = \#$ di "X" in colonna vincente $\quad Z \sim B(13, p) \quad p = 0.28$

$$P(Z=0) = (1-p)^{13} = (1-0.28)^{13} = 0.014$$