Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2009/2010
Teoria delle Decisioni

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 06 settembre 2010

1. (7 punti) Introdurre la definizione di densità condizionale, densità congiunta e densità marginale per una variabile aleatoria vettoriale bidimensionale e specificarne la relazione nel caso di variabili dipendenti ed indipendenti. Calcolare quindi la legge della variabile $X+Y$, se la legge congiunta della variabile (X,Y) è $f(x,y)$.
2. (7 punti) Enunciare e dimostrare la legge dei grandi numeri.
3. (8 punti) Si sceglie un numero intero k a caso, con $1 \le k \le 10^n$. Qual'è la probabilità che k sia multiplo di 5? E multiplo di 5 ma non di 25?
4. (8 punti) Sia X una variabile aleatoria discreta che prendi i valori -1, 0 ed 1 con probabilità uniforme. Dimostrare che le variabili X ed X^2 (a) non sono indipendenti e (b) non sono correlate.

---

(3) I multipli di 5 compresi fra 1 e 10^n sono $\frac{10^n}{5}$.
Essendo la probabilità uniforme, la risposta è $\frac{10^n/5}{10^n} = \frac{1}{5}$
Analogamente, i multipli di 25 sono $\frac{10^n}{25}$.
Dunque la risposta è $\frac{10^n/5 - 10^n/25}{10^n} = \frac{4}{25}$

(4) (a) $P\{X=0, X^2=0\} = P\{X=0\} = \frac{1}{3}$ poiché $X^2=0 \Leftrightarrow X=0$

mentre $P\{X=0\} \cdot P\{X^2=0\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{3}$

(b) $Cov(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X)E(X^2)$

$E(X \cdot X^2) = E(X^3) = E(X) = 0$

$\Rightarrow Cov(X, X^2) = 0$