Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2009/2010
Teoria delle Decisioni

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 17 aprile 2010

1. (7 punti) Introdurre i concetti generali delle catene di Markov e discutere la classificazione degli stati.

2. (7 punti) Introdurre il concetto di stimatore di un parametro, specificando cosa si intende per stimatore distorto e non distorto. Discutere quindi il problema della stima di media e varianza per un campione gaussiano.

3. (8 punti) Una scatola contiene tre palline, una rossa, una gialla ed una blu. Si estrae una pallina a caso, se ne osserva il colore e la si rimette nella scatola, aggiungendovi un'altra pallina dello stesso colore. Si estrae quindi una seconda pallina.

   (i) Qual'è la probabilità che la seconda pallina sia blu?

   (ii) Sapendo che la seconda pallina estratta è blu, qual'è la probabilità che anche la prima fosse blu?

4. (8 punti) Sia X una variabile aleatoria di legge uniforme sull'insieme $\{-m, -m+1, -m+2, ..., -1, 0, 1, ..., m-2, m-1, m\}$ e sia Z una variabile che assume i due valori 1 e -1 con uguale probabilità. Supponiamo che X e Z siano indipendenti e poniamo $Y = x^2 + Z$.

   (i) Calcolare $E[X]$ ed $E[X^3]$;

   (ii) calcolare la legge condizionale di Y dato $X = k$ e poi la media di tale legge;

   (iii) calcolare la covarianza di X ed Y.

Soluzioni ③ Indichiamo con

$A =$ prima pallina rossa o gialla

$B =$ " " blu $\qquad C =$ seconda pallina blu

$P(A) = \frac{2}{3} \qquad P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(C|A) = \frac{1}{4} \qquad P(C|B) = \frac{1}{2}$

a) $P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{1}{3}$

b) $P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = \frac{1}{2}$

---

④ X assume $\{-m, \dots, m\}$ con prob. $\frac{1}{2m+1}$

(i) $E(X) = \frac{1}{2m+1}\left\{-m + (-m+1) + \dots + (m-1) + m\right\} = 0$

Anche $E[X] = \sum_{i=-m}^{m} p_i \cdot i = \sum_{1}^{m} p_i(+i-i) = 0$

$E[X^3] = \sum_{i=-m}^{m} p_i\, i^3 = 0$

(ii) Legge congiunta: $P(Y=r, X=k) = P(X^2 + Z = r, X = k) =$

$= P(Z = r-k^2, X=k) = P(Z = r-k^2)\,P(X=k) =$

$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2m+1} & \text{se } r = k^2 \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Dunque $P(Y=r|X=k) = \frac{P(Y=r, X=k)}{P(X=k)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } r = k^2 \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$E[Y|X=k] = \frac{1}{2}(k^2+1) + \frac{1}{2}(k^2-1) = k^2$

(iii) $Cov(X,Y) = E[XY] - \underbrace{E[X]}_{=0}E[Y] = E[X(X^2+Z)] = E[XZ] + \underbrace{E[X^3]}_{=0} =$

$= E[X]E[Z] = 0$