Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
Curriculum di Biomedica
Anno Accademico 2012/2013
Statistica Medica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 luglio 2013

1. Il test del PSA è usato per individuare il tumore alla prostata nei soggetti maschili. Si tratta notoriamente di un test poco affidabile; infatti, la probabilità di riscontrare un livello elevato di PSA in una prostata non tumorale è del 13.5 %, che sale al 26.8 % per una prostata affetta dal tumore. Se, sulla base di altri fattori o altre diagnosi indipendenti, un medico giudica al 70 % la probabilità che un dato paziente sia affetto dal tumore alla prostata, qual'è la probabilità che il paziente sia effettivamente ammalato se *(i)* il test rileva un elevato livello di PSA; se *(ii)* il test rileva un livello di PSA normale.

Soluzione.
Eventi: $T+$: PSA elevato; $T-$: PSA normale; M: Persona affetta dal tumore; $S = M^c$: persona sana.
Dai dati: $P(T+|S) = 0.135$, $P(T+|M) = 0.268$, $P(M) = 0.7$ e quindi $P(S) = 0.3$. Ci serviranno anche: $P(T-|S) = 1 - P(T+|S) = 1 - 0.135 = 0.865$ e $P(T-|M) = 1 - P(T+|M) = 1 - 0.268 = 0.732$

Si chiede: *(i)* $P(M|T+)$ e *(ii)* $P(M|T-)$.

(i) Usiamo Bayes:

$$P(M|T+) = \frac{P(T+|M)P(M)}{P(T+)}$$

Per il teorema delle probabilità totali,

$$P(T+) = P(T+|S)P(S) + P(T+|M)P(M) = 0.135 \times 0.3 + 0.268 \times 0.7 = 0.228$$

e quindi

$$P(M|T+) = \frac{0.268 \times 0.7}{0.228} = 0.823$$

(ii) Usiamo nuovamente Bayes:

$$P(M|T-) = \frac{P(T-|M)P(M)}{P(T-)}$$

Per il teorema delle probabilità totali,

$$P(T-) = P(T-|S)P(S) + P(T-|M)P(M) = 0.865 \times 0.3 + 0.732 \times 0.7 = 0.772$$

e quindi

$$P(M|T-) = \frac{0.732 \times 0.7}{0.772} = 0.664$$

2. Un test di laboratorio ha sensibilità e specificità del 99%. Se l'incidenza della malattia sulla popolazione è di 5 casi su 100, qualè la predittività del test?

Soluzione.
Eventi: $T+$: test positivo; $T-$: test negativo; M: persona malata; $S = M^c$: persona sana.
Dai dati: $P(T+|M) = P(T-|S) = 0.99$; $P(M) = 0.05$; $P(S) = 1 - P(M) = 0.95$. Ci servirà anche $P(T+|S) = 1 - P(T-|S) = 1 - 0.99 = 0.01$.

Si chiede il valore predittivo $P(M|T+)$. Usando Bayes:

$$P(M|T+) = \frac{P(T+|M)P(M)}{P(T+)}$$

Dal teorema delle probabilità totali:

$$P(T+) = P(T+|M)P(M) + P(T+|S)P(S) = 0.99 \times 0.05 + 0.01 \times 0.95 = 0.059$$

e quindi

$$P(M|T+) = \frac{0.99 \times 0.05}{0.059} = 0.839$$

3. Consideriamo una popolazione di famiglie con due figli. Supponiamo che ad ogni nascita la probabilità di essere maschio sia uguale a quella di essere femmina. Presa una famiglia a caso, sia A_1 l'evento "entrambi i sessi sono rappresentati" ed A_2 l'evento "al più uno dei figli è femmina". *(i)* Dire se A_1 ed A_2^c sono compatibili e se sono indipendenti. Inoltre, supponiamo che per la nascita di un terzo figlio, la probabilità che sia maschio sia 11/20 se i primi due sono maschi, 2/5 se sono femmine e 1/2 negli altri casi. *(i)* Sapendo che in una famiglia il terzo figlio e' maschio, qual'è la probabilità che i primi due fossero maschi?

Soluzione.
Eventi: M: figlio maschio; F: figlia femmina; MM: due figli maschi; FF: due figlie femmine, MF: maschio-femmina; FM: femmina maschio.
Dai dati: $P(M) = P(F) = 0.5$; $P(M|MM) = 11/20$; $P(M|FF) = 2/5$; $P(M|FM) = P(M|MF) = 0$.

Si chiede: *(i)* $A_1 \cap A_2^c = \emptyset$? $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1) \times P(A_2^c)$? *(ii)* $P(MM|M) =$?

(i) $A_1 = \{MF\} \cup \{FM\}$; $A_2 = \{MM\} \cup \{MF\} \cup \{FM\}$; $A_2^c = \{FF\}$. Pertanto $A_1 \cap A_2^c = \emptyset$ ed i due eventi sono incompatibili. Inoltre, $P(A_1 \cap A_2^c) = 0$.
Abbiamo: $P(MM) = P(FF) = P(MF) = P(FM) = 1/4$

e quindi $P(A_1) = 1/2$; $P(A_2) = 3/4$ e $P(A_2^c) = 1/4$. Perciò: $P(A_1) \times P(A_2^c) = 1/8 \neq 0$, quindi i due eventi non sono indipendenti.

(ii) Ci serve $P(M)$, da calcolare con le probabilità totali:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M|MM)\,P(MM) + P(M|FF)\,P(FF) + \\ &\quad + P(M|MF)\,P(MF) + P(M|FM)\,P(FM) = \\ &= \left(\frac{11}{20} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} = \frac{39}{80} \end{aligned}$$

Con Bayes:

$$P(MM|M) = \frac{P(M|MM)\,P(MM)}{P(M)} = \frac{11/20 \times 1/4}{39/80} = \frac{11}{39}$$

4. Una variabile casuale X segue la distribuzione di Poisson con media $E[X] = 2$. Calcolare

- $P(X = 0)$;
- $P(X \geq 1)$;
- $P(X \leq 4)$.

Soluzione.
Distribuzione di Poisson:

$$f(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

la cui media vale $E[X] = \lambda$. Quindi (dai dati) $\lambda = 2$ e

- $P(X = 0) = f(0) = e^{-2} \approx 0.135$;
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-2} \approx 0.865$;
- $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$
  $= e^{-2} \times \left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} + \frac{16}{24}\right) = e^{-2} \times 7 \approx 0.947$