

Soluzioni Analitiche e Numeriche Applicate all'Ingegneria Ambientale

Massimiliano Martinelli

massimiliano.martinelli@gmail.com

Università Politecnica delle Marche, Ancona
Facoltà di Ingegneria

4-5 Marzo 2009

Definizioni

- Una EDP è una relazione che lega un insieme di variabili indipendenti $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, una funzione incognita $u(\mathbf{x})$ e un certo numero di derivate parziali di u :

$$F\left(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_r} u(\mathbf{x})}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_r^{p_r}}\right) = 0$$

- L'*ordine* di una EDP è il grado più alto delle derivate parziali presenti nell'equazione precedente, cioè il massimo valore assoluto di $p_1 + \dots + p_r$
- Se F è lineare rispetto ad u e alle sue derivate, l'EDP è definita essere *lineare*
- Se si ha una sola variabile $\mathbf{x} = x_1 \Rightarrow$ Equazioni Differenziali Ordinarie
- In molti problemi le variabili si possono decomporre in variabili temporali e spaziali, ovvero $\mathbf{x} = (t, x_1, \dots, x_r)$

Sistema di equazioni di Eulero

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{W})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{W})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3(\mathbf{W})}{\partial z} = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)$ sono chiamate *variabili conservative* e

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E + p) \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_3(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(E + p) \end{pmatrix}$$

sono i termini (*flussi*) convettivi

- Equazione fluidodinamica per un fluido comprimibile *non viscoso*
- Il sistema di equazioni di Eulero è un sistema di EDP *non lineare*, evolutivo e di ordine 1

Sistema di equazioni di Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{W})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{W})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3(\mathbf{W})}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{G}_1(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_2(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_3(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})}{\partial z} = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{G}_1(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})$, $\mathbf{G}_2(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})$ e $\mathbf{G}_3(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})$ sono i termini (*flussi*) diffusivi

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_{xx} \\ -\tau_{xy} \\ -\tau_{xz} \\ -g_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_2(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{yy} \\ -\tau_{yz} \\ -g_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_3(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_{zx} \\ -\tau_{zy} \\ -\tau_{zz} \\ -g_3 \end{pmatrix}$$

dove $g_1 = q_x + u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}$, $g_2 = q_y + u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}$, ...

- Equazione fluidodinamica per un fluido comprimibile *viscoso*
- È un sistema di EDP *non lineare*, evolutivo e di ordine 2

Sistema di equazioni di Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico, \mathbf{B} il campo magnetico, \mathbf{j} la densità di corrente e ρ la densità di carica

- Equazione fondamentale in elettromagnetismo

Equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_j} \nabla^2 \Psi + V(\mathbf{x}) \Psi$$

dove $\mathbf{x} = (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, x^{(2)}, \dots, z^{(N)})$ è la posizione delle particelle e $\Psi(\mathbf{x})$ è la funzione d'onda delle particelle

- Equazione fondamentale della meccanica quantistica non relativistica
- È una EDP lineare, evolutiva e di ordine 2

Equazione di Lotka-Volterra (modello preda-predatore)

$$\begin{cases} x_1'(t) = (a_1 - a_{12}x_2(t))x_1(t) \\ x_2'(t) = -(a_2 - a_{21}x_1(t))x_2(t) \end{cases}$$

dove $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due grandezze che misurano l'entità delle popolazioni 1 e 2 al tempo t (ad esempio il numero di individui). a_1, a_2, a_{12} e a_{21} sono costanti positive.

- È un sistema di ODE *non lineare* di ordine 1

Propagazione di una epidemia

$$\begin{cases} s'(t) = -kas(t)m(t) \\ m'(t) = kas(t)m(t) - bm(t) \end{cases}$$

dove:

- $s(t)$ è il numero di individui sani
- $m(t)$ è il numero di individui malati in circolazione
- a è un coefficiente che misura la virulenza della malattia
- b è il tasso con cui gli individui malati vengono rimossi dalla possibilità del contagio (isolati, deceduti, immunizzati, ...)
- k è il coefficiente legato al numero di incontri tra individui sani e malati

È un sistema di ODE *non lineare* di ordine 1

Migrazione dei lavoratori

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \lambda + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}$$

in cui $\lambda(x, t)$ è la densità di lavoratori al posto x e al tempo t e $\omega(x, t)$ è lo stipendio medio al posto x e al tempo t

Problema ben posto (secondo Hadamard)

Un problema di EDP è detto *ben posto* quando sono soddisfatte le proprietà seguenti:

- Esiste una soluzione
 - La soluzione è unica
 - La soluzione dipende in maniera continua dai dati
-
- Le prime due proprietà dipendono, in particolare, dalle *condizioni iniziali e/o ai limiti* che vengono imposte
 - Il numero di condizioni da imporre è legato al tipo di equazione e al suo ordine:
 - Se si impongono troppe condizioni, il problema può non avere soluzioni
 - Se non ci sono abbastanza condizioni, si possono trovare delle soluzioni che non sono “fisiche”
 - La terza proprietà assicura che a piccole variazioni di dati corrispondono piccole variazioni dei risultati

Esempio

Si consideri il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,x)} = \phi(x) \end{array} \right.$$

Esempio

Si consideri il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,x)} = \phi(x) \end{array} \right.$$

- Esiste un'unica soluzione u in $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$
- Se $\phi(x) = \phi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} n \sin(nx)$, allora la soluzione è

$$u_n(t, x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx) e^{nt}$$

Esempio

Si consideri il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,x)} = \phi(x) \end{cases}$$

- Esiste un'unica soluzione u in $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$
- Se $\phi(x) = \phi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} n \sin(nx)$, allora la soluzione è

$$u_n(t, x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx) e^{nt}$$

Però abbiamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = 0$ e $\forall t_0 > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t_0, x) = +\infty$ quindi la soluzione non dipende in maniera continua dai dati \Rightarrow Il problema non è ben posto

Classificazione delle EDP

Consideriamo una EDP lineare, di *ordine 2* e con due variabili indipendenti:

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y)$$

• Questa equazione è detta

• *iperbolica* se $b^2 - 4ac > 0$

• *ellittica* se $b^2 - 4ac < 0$

• *parabolica* se $b^2 - 4ac = 0$ e $\text{rank} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} = 2$

Classificazione delle EDP

Consideriamo una EDP lineare, di *ordine 2* e con due variabili indipendenti:

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y)$$

- Questa equazione è detta
 - *iperbolica* se $b^2 - 4ac > 0$
 - *ellittica* se $b^2 - 4ac < 0$
 - *parabolica* se $b^2 - 4ac = 0$ e $\text{rank} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} = 2$
- Se $a(x,y), \dots, f(x,y)$ non sono costanti, allora la classificazione ha un carattere *locale*

Classificazione delle EDP

Consideriamo una EDP lineare, di *ordine 2* e con due variabili indipendenti:

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y)$$

- Questa equazione è detta
 - *iperbolica* se $b^2 - 4ac > 0$
 - *ellittica* se $b^2 - 4ac < 0$
 - *parabolica* se $b^2 - 4ac = 0$ e $\text{rank} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} = 2$
- Se $a(x,y), \dots, f(x,y)$ non sono costanti, allora la classificazione ha un carattere *locale*
- $\left(a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ è chiamato *parte principale* dell'operatore differenziale
- La natura iperbolica ed ellittica dell'equazione differenziale dipende solo dalla sua parte principale

Classificazione delle EDP

Nel caso di N variabili, possiamo scrivere l'equazione lineare di ordine 2 come

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = H(\mathbf{x}, u) \quad (1)$$

- La classificazione è ora basata sugli autovalori della matrice A i cui elementi sono $a_{ij}(\mathbf{x})$
- Si può sempre scegliere A simmetrica $\Rightarrow A$ ha soltanto autovalori reali

Classificazione delle EDP

Nel caso di N variabili, possiamo scrivere l'equazione lineare di ordine 2 come

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = H(\mathbf{x}, u) \quad (1)$$

- La classificazione è ora basata sugli autovalori della matrice A i cui elementi sono $a_{ij}(\mathbf{x})$
- Si può sempre scegliere A simmetrica $\Rightarrow A$ ha soltanto autovalori reali
- L'equazione (1) è detta
 - *iperbolica* se tutti gli autovalori sono non nulli ma ne esiste uno che ha segno diverso dagli altri
 - *ellittica* se tutti gli autovalori sono non nulli e hanno lo stesso segno
 - *parabolica* se esiste un autovalore nullo e $\text{rank}(A(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})) = N$ (con $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (b_1(\mathbf{x}), \dots, b_N(\mathbf{x}))^T$)
- Questa classificazione non esaurisce tutti i casi possibili di EDP lineari di ordine 2

Classificazione delle EDP

Consideriamo ora il sistema lineare di equazioni del *primo ordine* seguente

$$A\mathbf{W}_x + B\mathbf{W}_y = \mathbf{f} \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^n$$

con A, B matrici quadrate di ordine n

Classificazione delle EDP

Consideriamo ora il sistema lineare di equazioni del *primo ordine* seguente

$$A\mathbf{W}_x + B\mathbf{W}_y = \mathbf{f} \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^n$$

con A, B matrici quadrate di ordine n

- Se A è invertibile, la classificazione è fatta in base alle soluzioni dell'equazione

$$P(\lambda) = \det(B - A\lambda) = 0$$

ed al numero di autovettori indipendenti che verificano

$$(B - A\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Classificazione delle EDP

Consideriamo ora il sistema lineare di equazioni del *primo ordine* seguente

$$A\mathbf{W}_x + B\mathbf{W}_y = \mathbf{f} \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^n$$

con A, B matrici quadrate di ordine n

- Se A è invertibile, la classificazione è fatta in base alle soluzioni dell'equazione

$$P(\lambda) = \det(B - A\lambda) = 0$$

ed al numero di autovettori indipendenti che verificano

$$(B - A\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

- Il sistema è detto
 - *iperbolico* se $P(\lambda)$ ha n radici reali e n autovettori indipendenti
 - *ellittico* se $P(\lambda)$ non ha radici reali
 - *parabolico* se $P(\lambda)$ ha n radici reali con almeno una radice doppia e ν autovettori indipendenti ($1 \leq \nu \leq n - 1$)

Problemi *stazionari* ed *evolutivi*

- Le equazioni ellittiche descrivono problemi *stazionari*: in tal caso le variabili $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ possono essere considerate come variabili spaziali \Rightarrow Per chiudere il problema si aggiungono le condizioni ai limiti (dette anche condizioni al bordo o di frontiera)
- Le equazioni iperboliche e paraboliche descrivono problemi *evolutivi*: in tal caso una delle variabili assume il ruolo di variabile temporale. Richiedono l'uso di condizioni iniziali e di condizioni al bordo.

Problemi *stazionari* ed *evolutivi*

- Le equazioni ellittiche descrivono problemi *stazionari*: in tal caso le variabili $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ possono essere considerate come variabili spaziali \Rightarrow Per chiudere il problema si aggiungono le condizioni ai limiti (dette anche condizioni al bordo o di frontiera)
- Le equazioni iperboliche e paraboliche descrivono problemi *evolutivi*: in tal caso una delle variabili assume il ruolo di variabile temporale. Richiedono l'uso di condizioni iniziali e di condizioni al bordo.

Sia L l'operatore differenziale corrispondente a un'equazione ellittica del tipo (1). Allora:

Problemi *stazionari* ed *evolutivi*

- Le equazioni ellittiche descrivono problemi *stazionari*: in tal caso le variabili $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ possono essere considerate come variabili spaziali \Rightarrow Per chiudere il problema si aggiungono le condizioni ai limiti (dette anche condizioni al bordo o di frontiera)
- Le equazioni iperboliche e paraboliche descrivono problemi *evolutivi*: in tal caso una delle variabili assume il ruolo di variabile temporale. Richiedono l'uso di condizioni iniziali e di condizioni al bordo.

Sia L l'operatore differenziale corrispondente a un'equazione ellittica del tipo (1). Allora:

- $u_t + Lu = 0$ è un'equazione parabolica per $u(x_1, \dots, x_n; t)$ e t corrisponde all'autovalore $\lambda = 0$

Problemi *stazionari* ed *evolutivi*

- Le equazioni ellittiche descrivono problemi *stazionari*: in tal caso le variabili $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ possono essere considerate come variabili spaziali \Rightarrow Per chiudere il problema si aggiungono le condizioni ai limiti (dette anche condizioni al bordo o di frontiera)
- Le equazioni iperboliche e paraboliche descrivono problemi *evolutivi*: in tal caso una delle variabili assume il ruolo di variabile temporale. Richiedono l'uso di condizioni iniziali e di condizioni al bordo.

Sia L l'operatore differenziale corrispondente a un'equazione ellittica del tipo (1). Allora:

- $u_t + Lu = 0$ è un'equazione parabolica per $u(x_1, \dots, x_n; t)$ e t corrisponde all'autovalore $\lambda = 0$
- se la matrice A ha soltanto autovalori negativi

$$u_{tt} + Lu = 0$$

è un'equazione iperbolica per $u(x_1, \dots, x_n; t)$ e t corrisponde all'autovalore con segno diverso

Equazioni ellittiche (problemi stazionari)

- Una perturbazione in un punto influenza la soluzione in *tutto* il dominio considerato
- Sono necessarie *condizioni al bordo* per tutte le frontiere e per tutte le incognite

Equazioni ellittiche (problemi stazionari)

- Una perturbazione in un punto influenza la soluzione in *tutto* il dominio considerato
- Sono necessarie *condizioni al bordo* per tutte le frontiere e per tutte le incognite

Equazioni paraboliche (problemi evolutivi)

- I problemi parabolici sono caratterizzati da fenomeni di *diffusione* \Rightarrow una perturbazione è attenuata rapidamente
- In generale, sono necessarie sia condizioni al bordo che condizioni ai valori iniziali

Equazioni ellittiche (problemi stazionari)

- Una perturbazione in un punto influenza la soluzione in *tutto* il dominio considerato
- Sono necessarie *condizioni al bordo* per tutte le frontiere e per tutte le incognite

Equazioni paraboliche (problemi evolutivi)

- I problemi parabolici sono caratterizzati da fenomeni di *diffusione* \Rightarrow una perturbazione è attenuata rapidamente
- In generale, sono necessarie sia condizioni al bordo che condizioni ai valori iniziali

Equazioni iperboliche (problemi evolutivi)

- Tipicamente descrivono problemi di propagazione di onde in assenza di dissipazione
- Le condizioni al bordo e ai valori iniziali dipendono dalle *direzioni caratteristiche* dell'equazione considerata

Problemi ellittici: esempi

- Il Laplaciano ∇^2 è un operatore ellittico \Rightarrow Le equazioni di Laplace $\nabla^2\phi = 0$ e di Poisson $\nabla^2\phi = f$ sono EDP ellittiche. Esse descrivono per esempio
 - la deformazione di una membrana soggetta ad un carico
 - la ripartizione del calore in un ambiente omogeneo

Problemi ellittici: esempi

- Il Laplaciano ∇^2 è un operatore ellittico \Rightarrow Le equazioni di Laplace $\nabla^2\phi = 0$ e di Poisson $\nabla^2\phi = f$ sono EDP ellittiche. Esse descrivono per esempio
 - la deformazione di una membrana soggetta ad un carico
 - la ripartizione del calore in un ambiente omogeneo
- Equazione del potenziale: è un'equazione semplificata per corpi aereodinamici in un flusso *stazionario*, *subsonico* di un fluido *comprimibile non viscoso*:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

dove ϕ è il potenziale della velocità ($\mathbf{v} = \nabla\phi$), e $M_\infty < 1$ è il numero di Mach

Problemi ellittici: esempi

- Il Laplaciano ∇^2 è un operatore ellittico \Rightarrow Le equazioni di Laplace $\nabla^2\phi = 0$ e di Poisson $\nabla^2\phi = f$ sono EDP ellittiche. Esse descrivono per esempio
 - la deformazione di una membrana soggetta ad un carico
 - la ripartizione del calore in un ambiente omogeneo
- Equazione del potenziale: è un'equazione semplificata per corpi aereodinamici in un flusso *stazionario*, *subsonico* di un fluido *comprimibile non viscoso*:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

dove ϕ è il potenziale della velocità ($\mathbf{v} = \nabla\phi$), e $M_\infty < 1$ è il numero di Mach

- Equazioni di Navier-Stokes *stazionarie*

Esempi di problemi ben posti per EDP ellittiche, lineari e di ordine 2

Sia Ω un aperto limitato e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ la frontiera di Ω

- Problema di Dirichlet
$$\begin{cases} \nabla^2 u = f & \text{su } \Omega \\ u = g & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

- Problema di Neumann
$$\begin{cases} \nabla^2 u = f & \text{su } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = g & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

- Problema misto di Neumann-Dirichlet
$$\begin{cases} \nabla^2 u = f & \text{su } \Omega \\ u = g & \text{su } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = h & \text{su } \Gamma_2 \end{cases}$$

- Problema di Robin
$$\begin{cases} \nabla^2 u = f & \text{su } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + ku = h & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

Esempio di problema parabolico: equazione del calore

Consideriamo la diffusione del calore in una barra infinita

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ T(x, 0) = T_0(x) \end{cases}$$

- Questo problema ha soluzione $T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} T_0(y) dy$

Esempio di problema parabolico: equazione del calore

Consideriamo la diffusione del calore in una barra infinita

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ T(x, 0) = T_0(x) \end{cases}$$

- Questo problema ha soluzione $T(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} T_0(y) dy$
- Consideriamo il caso in cui i dati iniziali siano discontinui

$$T_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

la soluzione diventa

$$T(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

Esempio di problema parabolico: equazione del calore

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

- Per ogni $t > 0$ abbiamo che

$$T(0,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}$$

perciò non abbiamo più la discontinuità per $x = 0$

Esempio di problema parabolico: equazione del calore

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

- Per ogni $t > 0$ abbiamo che

$$T(0,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}$$

perciò non abbiamo più la discontinuità per $x = 0$

- Inoltre, per ogni $t > 0$ abbiamo $T(x,t) > 0 \Rightarrow$ Il calore si propaga a *velocità infinita*, cioè $T_0(x)$ influenza istantaneamente tutto il dominio spaziale

Esempio di problema parabolico: equazione del calore

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

- Per ogni $t > 0$ abbiamo che

$$T(0,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}$$

perciò non abbiamo più la discontinuità per $x = 0$

- Inoltre, per ogni $t > 0$ abbiamo $T(x,t) > 0 \Rightarrow$ Il calore si propaga a *velocità infinita*, cioè $T_0(x)$ influenza istantaneamente tutto il dominio spaziale

Altro esempio di problema parabolico (non lineare): equazioni di Navier-Stokes *non-stazionarie*

Equazioni iperboliche

Definizione

Sia $A(x)$ una matrice quadrata di ordine n . Il sistema lineare di equazioni del primo ordine

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

è detto *iperbolico* se, per ogni x , A è diagonalizzabile ed ha autovalori reali (cioè $A(x) = T(x)\Lambda(x)T^{-1}(x)$, con

- $\Lambda(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$ è la matrice diagonale degli autovalori di $A(x)$
- $T(x) = (\mathbf{r}_1(x), \dots, \mathbf{r}_n(x))$ è la matrice le cui colonne sono gli autovettori destri di $A(x)$, cioè

$$A(x)\mathbf{r}_k(x) = \lambda_k(x)\mathbf{r}_k(x) \quad k = 1, \dots, n$$

Allora, il seguente problema ai valori iniziali (o problema di Cauchy) è ben posto

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + A(x)\mathbf{u}_x = \mathbf{0} & x \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

Esempi

- Equazione di convezione:

$$u_t + cu_x = 0$$

- Equazione delle onde:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

- Equazione del potenziale per un flusso supersonico
- Equazioni di Eulero (non lineari)

Equazione di convezione

Consideriamo il seguente problema iperbolico scalare

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}, c \neq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Equazione di convezione

Consideriamo il seguente problema iperbolico scalare

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}, c \neq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- La soluzione di tale problema è un'onda viaggiante con velocità c data da

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \quad t \geq 0$$

Equazione di convezione

Consideriamo il seguente problema iperbolico scalare

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}, c \neq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- La soluzione di tale problema è un'onda viaggiante con velocità c data da

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \quad t \geq 0$$

- Consideriamo le curve $x(t)$ soluzioni delle seguenti ODE (al variare di x_0)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Equazione di convezione

Consideriamo il seguente problema iperbolico scalare

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}, c \neq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- La soluzione di tale problema è un'onda viaggiante con velocità c data da

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \quad t \geq 0$$

- Consideriamo le curve $x(t)$ soluzioni delle seguenti ODE (al variare di x_0)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- Tali curve sono dette *linee caratteristiche* e lungo di esse la soluzione $u(x, t)$ rimane costante in quanto $\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0$

Equazione di convezione

Consideriamo il seguente problema iperbolico scalare su un *intervallo limitato* (a sinistra)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, x > 0, c > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

Equazione di convezione

Consideriamo il seguente problema iperbolico scalare su un *intervallo limitato* (a sinistra)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, x > 0, c > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

- La linea caratteristica che parte da $x_0 = 0$ è $x(t) = ct$

Equazione di convezione

Consideriamo il seguente problema iperbolico scalare su un *intervallo limitato* (a sinistra)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, x > 0, c > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

- La linea caratteristica che parte da $x_0 = 0$ è $x(t) = ct$
- Se utilizziamo la soluzione precedente $u(x, t) = u_0(x - ct)$ abbiamo dei problemi: per ogni $t > 0$ abbiamo dei valori definiti solo nell'intervallo $[ct, +\infty)$ invece che su $[0, +\infty)$

Equazione di convezione

Consideriamo il seguente problema iperbolico scalare su un *intervallo limitato* (a sinistra)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, x > 0, c > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

- La linea caratteristica che parte da $x_0 = 0$ è $x(t) = ct$
- Se utilizziamo la soluzione precedente $u(x, t) = u_0(x - ct)$ abbiamo dei problemi: per ogni $t > 0$ abbiamo dei valori definiti solo nell'intervallo $[ct, +\infty)$ invece che su $[0, +\infty)$
- Serve una condizione che ci permetta di definire la soluzione nell'intervallo $[0, ct) \Rightarrow$ *Condizione al bordo* $x = 0$

$$u(0, t) = u_1(t) \quad t > 0$$

con le condizioni di compatibilità $u_0(0) = u_1(0) = u(0, 0)$

Equazione di convezione

Allora il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, x > 0, c > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \geq 0 \\ u(0, t) = u_1(t) & t \geq 0 \\ u_0(0) = u_1(0) \end{cases}$$

ammette l'unica soluzione

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct) & \text{se } x \geq ct \\ u_1(t - x/c) & \text{se } x < ct \end{cases}$$

Equazioni iperboliche: dominio di dipendenza e caratteristiche

Cerchiamo la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0} & x \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \end{cases}$$

Equazioni iperboliche: dominio di dipendenza e caratteristiche

Cerchiamo la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0} & x \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \end{cases}$$

- Ricordiamo che $A(x) = T(x)\Lambda(x)T^{-1}(x)$ e poniamo $\mathbf{v}(x, t) = T^{-1}(x)\mathbf{u}(x, t)$ (*variabili caratteristiche*). Possiamo allora scrivere il sistema precedente come

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda(x) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(x, 0) = T^{-1}(x)\mathbf{u}_0(x) \end{cases}$$

- Ovvero si hanno n equazioni scalari indipendenti $\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0$

Equazioni iperboliche: dominio di dipendenza e caratteristiche

Cerchiamo la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0} & x \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \end{cases}$$

- Ricordiamo che $A(x) = T(x)\Lambda(x)T^{-1}(x)$ e poniamo $\mathbf{v}(x, t) = T^{-1}(x)\mathbf{u}(x, t)$ (*variabili caratteristiche*). Possiamo allora scrivere il sistema precedente come

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda(x) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(x, 0) = T^{-1}(x)\mathbf{u}_0(x) \end{cases}$$

- Ovvero si hanno n equazioni scalari indipendenti $\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0$
- Nel caso in cui A non dipenda da x , gli autovalori λ_i saranno delle costanti e le linee caratteristiche delle rette $x(t) = x_0 + \lambda_i t$

- Le soluzioni saranno determinate dalle condizioni iniziali

$$v_i(x, t) = v_i(x - \lambda_i t, 0) \quad i = 1, \dots, n$$

- Le soluzioni saranno determinate dalle condizioni iniziali

$$v_i(x, t) = v_i(x - \lambda_i t, 0) \quad i = 1, \dots, n$$

- Poiché $\mathbf{u}(x, t) = T\mathbf{v}(x, t)$, abbiamo $\mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^n v_i(x - \lambda_i t, 0)\mathbf{r}_i$, ovvero la soluzione del sistema originale è composta da n onde viaggianti e non interagenti

- Le soluzioni saranno determinate dalle condizioni iniziali

$$v_i(x, t) = v_i(x - \lambda_i t, 0) \quad i = 1, \dots, n$$

- Poiché $\mathbf{u}(x, t) = T\mathbf{v}(x, t)$, abbiamo $\mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^n v_i(x - \lambda_i t, 0)\mathbf{r}_i$, ovvero la soluzione del sistema originale è composta da n onde viaggianti e non interagenti

- Osserviamo che per ogni \bar{x} e \bar{t} fissati, $u(\bar{x}, \bar{t})$ dipenderà solo dal dato iniziale nei punti $\bar{x} - \lambda_i \bar{t}$ con $i = 1, \dots, n$.

- Le soluzioni saranno determinate dalle condizioni iniziali

$$v_i(x, t) = v_i(x - \lambda_i t, 0) \quad i = 1, \dots, n$$

- Poiché $\mathbf{u}(x, t) = T\mathbf{v}(x, t)$, abbiamo $\mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^n v_i(x - \lambda_i t, 0)\mathbf{r}_i$, ovvero la soluzione del sistema originale è composta da n onde viaggianti e non interagenti

- Osserviamo che per ogni \bar{x} e \bar{t} fissati, $u(\bar{x}, \bar{t})$ dipenderà solo dal dato iniziale nei punti $\bar{x} - \lambda_i \bar{t}$ con $i = 1, \dots, n$.
- L'insieme degli n punti che formano i piedi delle linee caratteristiche uscenti dal punto (\bar{x}, \bar{t}) , cioè

$$D(\bar{x}, \bar{t}) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x = \bar{x} - \lambda_i \bar{t}, i = 1, \dots, n\}$$

viene chiamato *dominio di dipendenza* della soluzione \mathbf{u} nel punto (\bar{x}, \bar{t})

- Le soluzioni saranno determinate dalle condizioni iniziali

$$v_i(x, t) = v_i(x - \lambda_i t, 0) \quad i = 1, \dots, n$$

- Poiché $\mathbf{u}(x, t) = T\mathbf{v}(x, t)$, abbiamo $\mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^n v_i(x - \lambda_i t, 0)\mathbf{r}_i$, ovvero la soluzione del sistema originale è composta da n onde viaggianti e non interagenti

- Osserviamo che per ogni \bar{x} e \bar{t} fissati, $u(\bar{x}, \bar{t})$ dipenderà solo dal dato iniziale nei punti $\bar{x} - \lambda_i \bar{t}$ con $i = 1, \dots, n$.
- L'insieme degli n punti che formano i piedi delle linee caratteristiche uscenti dal punto (\bar{x}, \bar{t}) , cioè

$$D(\bar{x}, \bar{t}) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x = \bar{x} - \lambda_i \bar{t}, i = 1, \dots, n\}$$

viene chiamato *dominio di dipendenza* della soluzione \mathbf{u} nel punto (\bar{x}, \bar{t})

- Nel caso si consideri un intervallo limitato, bisogna considerare anche condizioni al contorno oltre che le condizioni iniziali

Equazioni iperboliche non-lineari

Consideriamo il sistema del primo ordine seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

dove $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione (in generale) *non-lineare* e C^1 , e $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, t)$

Equazioni iperboliche non-lineari

Consideriamo il sistema del primo ordine seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

dove $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione (in generale) *non-lineare* e C^1 , e $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, t)$

- Se \mathbf{w} è una soluzione regolare (C^1) di (3), allora il sistema (3) è equivalente al sistema

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (4)$$

dove $A(\mathbf{w}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}$ è la matrice Jacobiana di \mathbf{F} , cioè $A_{ij} = \frac{\partial F_i(\mathbf{w})}{\partial w_j}$

- Il sistema (3) è detto in forma *conservativa*, mentre (4) è detto in forma *non conservativa* o di tipo *quasi lineare*

Equazioni iperboliche non-lineari

Consideriamo il sistema del primo ordine seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

dove $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione (in generale) *non-lineare* e C^1 , e $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, t)$

- Se \mathbf{w} è una soluzione regolare (C^1) di (3), allora il sistema (3) è equivalente al sistema

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (4)$$

dove $A(\mathbf{w}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}$ è la matrice Jacobiana di \mathbf{F} , cioè $A_{ij} = \frac{\partial F_i(\mathbf{w})}{\partial w_j}$

- Il sistema (3) è detto in forma *conservativa*, mentre (4) è detto in forma *non conservativa* o di tipo *quasi lineare*

Definizione

I problemi precedenti sono detti *iperbolici* se la matrice $A\mathbf{w}$ è diagonalizzabile in campo reale, per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

Equazione di Eulero 1D: $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix}$$

dove $p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2)$

Equazione di Eulero 1D: $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + p \\ \frac{w_2}{w_1}(w_3 + p) \end{pmatrix}$$

dove $p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2) = (\gamma - 1)(w_3 - \frac{w_2^2}{2w_1})$

$$\text{Equazione di Eulero 1D: } \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + p \\ \frac{w_2}{w_1}(w_3 + p) \end{pmatrix}$$

$$\text{dove } p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2) = (\gamma - 1)(w_3 - \frac{w_2^2}{2w_1})$$

$$A(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & (\gamma - 1) \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 - \frac{u}{\rho}(E + p) & \frac{1}{\rho}(E + p) - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}$$

$$\text{Equazione di Eulero 1D: } \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + p \\ \frac{w_2}{w_1}(w_3 + p) \end{pmatrix}$$

$$\text{dove } p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2) = (\gamma - 1)(w_3 - \frac{w_2^2}{2w_1})$$

$$A(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & (\gamma - 1) \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 - \frac{u}{\rho}(E + p) & \frac{1}{\rho}(E + p) - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}$$

- $A(\mathbf{w})$ ha autovalori $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u - c$ e $\lambda_3 = u + c$ dove $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ è la velocità del suono per un gas perfetto

$$\text{Equazione di Eulero 1D: } \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + p \\ \frac{w_2}{w_1}(w_3 + p) \end{pmatrix}$$

$$\text{dove } p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2) = (\gamma - 1)(w_3 - \frac{w_2^2}{2w_1})$$

$$A(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & (\gamma - 1) \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 - \frac{u}{\rho}(E + p) & \frac{1}{\rho}(E + p) - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}$$

- $A(\mathbf{w})$ ha autovalori $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u - c$ e $\lambda_3 = u + c$ dove $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ è la velocità del suono per un gas perfetto
- $A(\mathbf{w})$ ha autovalori reali e distinti $\Rightarrow A(\mathbf{w})$ è diagonalizzabile in campo reale, perciò l'equazione di Eulero è iperbolica.

Sia dato il problema ai limiti seguente:

Trovare u nello spazio funzionale V (solitamente di dimensione infinita), tale che

$$\begin{cases} Lu = f & \text{su } \Omega \\ Bu = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Sia dato il problema ai limiti seguente:

Trovare u nello spazio funzionale V (solitamente di dimensione infinita), tale che

$$\begin{cases} Lu = f & \text{su } \Omega \\ Bu = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Per il calcolo della soluzione con un metodo numerico, dobbiamo passare da un dominio e da una soluzione *continui* a un dominio e a una soluzione *discretizzati*

Sia dato il problema ai limiti seguente:

Trovare u nello spazio funzionale V (solitamente di dimensione infinita), tale che

$$\begin{cases} Lu = f & \text{su } \Omega \\ Bu = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Per il calcolo della soluzione con un metodo numerico, dobbiamo passare da un dominio e da una soluzione *continui* a un dominio e a una soluzione *discretizzati*

Discretizzazione del dominio

- Metodi *locali*: usano una *griglia* o *reticolazione* di calcolo
- Metodi *globali*: usano un insieme finito di punti di collocazione (metodi spettrali)

Sia dato il problema ai limiti seguente:

Trovare u nello spazio funzionale V (solitamente di dimensione infinita), tale che

$$\begin{cases} Lu = f & \text{su } \Omega \\ Bu = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Per il calcolo della soluzione con un metodo numerico, dobbiamo passare da un dominio e da una soluzione *continui* a un dominio e a una soluzione *discretizzati*

Discretizzazione del dominio

- Metodi *locali*: usano una *griglia* o *reticolazione* di calcolo
 - *Differenze finite*: insieme finito di nodi x_i
 - *Elementi finiti*: insieme finito di oggetti geometrici (per esempio, in 2D, triangoli o rettangoli)
 - *Volumi finiti*: insieme finito di celle (o volumi) costruite su una griglia di calcolo (griglie duali)
- Metodi *globali*: usano un insieme finito di punti di collocazione (metodi spettrali)

Discretizzazione della soluzione

Si cerca una soluzione \tilde{u} in uno spazio V_h di dimensione finita

- *Differenze finite*: si discretizza l'operatore differenziale, e si risolve il problema

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f} & \text{su } \Omega_h \\ \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{g} & \text{su } \partial\Omega_h \end{cases}$$

Quello che si calcola sono i *valori* di una funzione (sconosciuta) sui punti della griglia

Discretizzazione della soluzione

Si cerca una soluzione \tilde{u} in uno spazio V_h di dimensione finita

- *Differenze finite*: si discretizza l'operatore differenziale, e si risolve il problema

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f} & \text{su } \Omega_h \\ \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{g} & \text{su } \partial\Omega_h \end{cases}$$

Quello che si calcola sono i *valori* di una funzione (sconosciuta) sui punti della griglia

- *Metodi variazionali*: si cerca $\tilde{u} \in V_h$ tale che

$$\langle L\tilde{u} - \tilde{f}, \phi_i \rangle = 0 \quad \text{con } \phi_i \text{ base di } ; V_h$$

Quello che si calcola sono i coefficienti dello sviluppo della funzione \tilde{u} nella base ϕ_i

Discretizzazione della soluzione

Si cerca una soluzione \tilde{u} in uno spazio V_h di dimensione finita

- *Differenze finite*: si discretizza l'operatore differenziale, e si risolve il problema

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f} & \text{su } \Omega_h \\ \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{g} & \text{su } \partial\Omega_h \end{cases}$$

Quello che si calcola sono i *valori* di una funzione (sconosciuta) sui punti della griglia

- *Metodi variazionali*: si cerca $\tilde{u} \in V_h$ tale che

$$\langle L\tilde{u} - \tilde{f}, \phi_i \rangle = 0 \quad \text{con } \phi_i \text{ base di } ; V_h$$

Quello che si calcola sono i coefficienti dello sviluppo della funzione \tilde{u} nella base ϕ_i

- *Elementi finiti*: $V_h =$ spazio dei polinomi a tratti, $\phi_h =$ funzioni a supporto limitato
- *Metodi spettrali*: $V_h =$ spazio dei polinomi definiti su Ω_h , $\phi_h =$ funzioni non nulle su Ω_h
- *Volumi finiti*: $V_h =$ spazio delle funzioni costanti a tratti, $\phi_h =$ funzioni costanti su ogni cella

Metodi alle differenze finite

- Il dominio di calcolo è rappresentato da un insieme di punti ordinati (per esempio in 1D: $x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$)
- Si cerca *un'approssimazione dell'operatore differenziale* considerato, usando soltanto i valori della soluzione nei nodi della griglia
- Per l'approssimazione dell'operatore differenziale si usa lo sviluppo in serie di Taylor

Approssimazione della derivata prima

- Vogliamo un'approssimazione della derivata prima di una funzione $u(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$

Approssimazione della derivata prima

- Vogliamo un'approssimazione della derivata prima di una funzione $u(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$
- Sviluppo in serie di Taylor: se $u \in C^{k+1}([a, b])$, allora $\forall i$ esiste $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ tale che:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \dots + \frac{h^k}{k!}u^{(k)}(x_i) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}u^{(k+1)}(\xi)$$

Approssimazione della derivata prima

- Vogliamo un'approssimazione della derivata prima di una funzione $u(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$
- Sviluppo in serie di Taylor: se $u \in C^{k+1}([a, b])$, allora $\forall i$ esiste $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ tale che:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \dots + \frac{h^k}{k!}u^{(k)}(x_i) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}u^{(k+1)}(\xi)$$

- In particolare, se $u \in C^2([a, b])$, allora $\forall i$ esiste $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ tale che:

$$\left| u'(x_i) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \right| = \frac{h}{2} |u''(\xi)| = R_i$$

- $\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$ è un'approssimazione alla differenze finite *decentrata a destra* della derivata prima

Metodi alle differenze finite

Proprietà degli schemi numerici

- Consistenza: è la proprietà di rappresentare “correttamente l’equazione di partenza. Si richiede che l’errore di troncamento tenda a zero quando la dimensione del passo di discretizzazione tende a zero

Metodi alle differenze finite

Proprietà degli schemi numerici

- Consistenza: è la proprietà di rappresentare “correttamente l’equazione di partenza. Si richiede che l’errore di troncamento tenda a zero quando la dimensione del passo di discretizzazione tende a zero
- Ordine di precisione: in uno schema consistente è l’esponente dell’infinitesimo dell’errore di troncamento

Metodi alle differenze finite

Proprietà degli schemi numerici

- Consistenza: è la proprietà di rappresentare “correttamente l’equazione di partenza. Si richiede che l’errore di troncamento tenda a zero quando la dimensione del passo di discretizzazione tende a zero
- Ordine di precisione: in uno schema consistente è l’esponente dell’infinitesimo dell’errore di troncamento

Per lo schema decentrato a destra, l’errore di troncamento è

$$R_i = \frac{h}{2} |u''(\xi)| = O(h)$$

perciò lo schema è consistente e di ordine 1.

Altri schemi numerici per l'approssimazione della derivata prima

- Schema decentrato *a sinistra*

$$\frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h} = u'(x_i) + h \left(-\frac{u''(x_i)}{2} + \frac{h}{3!} u'''(x_i) + \dots \right)$$

⇒ è uno schema consistente di ordine 1

Altri schemi numerici per l'approssimazione della derivata prima

- Schema decentrato *a sinistra*

$$\frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h} = u'(x_i) + h \left(-\frac{u''(x_i)}{2} + \frac{h}{3!} u'''(x_i) + \dots \right)$$

⇒ è uno schema consistente di ordine 1

- Schema alle differenze finite centrate

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} = u'(x_i) + h^2 \left(\frac{1}{3!} u'''(x_i) + \frac{h^2}{5!} u^{(5)}(x_i) + \dots \right)$$

⇒ è uno schema consistente di ordine 2

Schemi di ordine superiore

Aumentando il numero di nodi che si utilizzano per approssimare la derivata prima si aumenta la precisione dello schema

Schemi di ordine superiore

Aumentando il numero di nodi che si utilizzano per approssimare la derivata prima si aumenta la precisione dello schema

- Schema decentrato di ordine 2:

$$u'_i = \frac{-u_{i+2} + 4u_{i+1} - 3u_i}{2h} + O(h^2)$$

- Schema centrato di ordine 4:

$$u'_i = \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12h} + O(h^4)$$

Approssimazione della derivata seconda

Idea: sviluppo di Taylor delle derivate prime + derivate prime calcolate con le differenze finite

- Lo schema $\frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ è uno schema decentrato per l'approssimazione di $u'_i = u'(x_i)$ ma è anche uno schema centrato per l'approssimazione di $u'_{i+1/2} = u'(x_i + \frac{h}{2})$, infatti

$$u_{i+1} = u_{i+1/2} + \frac{h}{2}u'_{i+1/2} + \frac{h^2}{4}u''_{i+1/2} + \frac{h^3}{12}u'''_{i+1/2} + O(h^4)$$

$$u_i = u_{i+1/2} - \frac{h}{2}u'_{i+1/2} + \frac{h^2}{4}u''_{i+1/2} - \frac{h^3}{12}u'''_{i+1/2} + O(h^4)$$

perciò $u'_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{h^2}{6}u'''_{i+1/2} + O(h^5)$

Approssimazione della derivata seconda

Idea: sviluppo di Taylor delle derivate prime + derivate prime calcolate con le differenze finite

- Lo schema $\frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ è uno schema decentrato per l'approssimazione di $u'_i = u'(x_i)$ ma è anche uno schema centrato per l'approssimazione di $u'_{i+1/2} = u'(x_i + \frac{h}{2})$, infatti

$$u_{i+1} = u_{i+1/2} + \frac{h}{2}u'_{i+1/2} + \frac{h^2}{4}u''_{i+1/2} + \frac{h^3}{12}u'''_{i+1/2} + O(h^4)$$

$$u_i = u_{i+1/2} - \frac{h}{2}u'_{i+1/2} + \frac{h^2}{4}u''_{i+1/2} - \frac{h^3}{12}u'''_{i+1/2} + O(h^4)$$

perciò $u'_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{h^2}{6}u'''_{i+1/2} + O(h^5)$

- Analogamente, si ha che $u'_{i-1/2} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h^2}{6}u'''_{i-1/2} + O(h^5)$.

Approssimazione della derivata seconda

Idea: sviluppo di Taylor delle derivate prime + derivate prime calcolate con le differenze finite

- Lo schema $\frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ è uno schema decentrato per l'approssimazione di $u'_i = u(x_i)$ ma è anche uno schema centrato per l'approssimazione di $u'_{i+1/2} = u(x_i + \frac{h}{2})$, infatti

$$u_{i+1} = u_{i+1/2} + \frac{h}{2}u'_{i+1/2} + \frac{h^2}{4}u''_{i+1/2} + \frac{h^3}{12}u'''_{i+1/2} + O(h^4)$$

$$u_i = u_{i+1/2} - \frac{h}{2}u'_{i+1/2} + \frac{h^2}{4}u''_{i+1/2} - \frac{h^3}{12}u'''_{i+1/2} + O(h^4)$$

perciò $u'_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{h^2}{6}u'''_{i+1/2} + O(h^5)$

- Analogamente, si ha che $u'_{i-1/2} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h^2}{6}u'''_{i-1/2} + O(h^5)$.
- Calcoliamo ora la derivata seconda con uno schema centrato

$$u''_i = \frac{u'_{i+1/2} - u'_{i-1/2}}{h} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h}{6}(u'''_{i+1/2} - u'''_{i-1/2}) + O(h^4)$$

Approssimazione della derivata seconda

- Dalla formula $u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h}{6}(u_{i+1/2}''' - u_{i-1/2}''') + O(h^4)$ sembrerebbe che l'errore di troncamento sia $O(h)$, ma dobbiamo ancora sviluppare $u_{i+1/2}'''$ e $u_{i-1/2}'''$ in x_i

Approssimazione della derivata seconda

- Dalla formula $u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h}{6}(u_{i+1/2}''' - u_{i-1/2}''') + O(h^4)$ sembrerebbe che l'errore di troncamento sia $O(h)$, ma dobbiamo ancora sviluppare $u_{i+1/2}'''$ e $u_{i-1/2}'''$ in x_i

$$\begin{aligned}
 u_i'' &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h}{6}(u_{i+1/2}''' - u_{i-1/2}''') + O(h^4) \\
 &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h}{6}(u_i''' + \frac{h}{2}u_i^{(4)} - u_i''' + \frac{h}{2}u_i^{(4)} + O(h^2)) + O(h^4) \\
 &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{6}u_i^{(4)} + O(h^3) \\
 &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)
 \end{aligned}$$

Approssimazione della derivata seconda

- Dalla formula $u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h}{6}(u_{i+1/2}''' - u_{i-1/2}''') + O(h^4)$ sembrerebbe che l'errore di troncamento sia $O(h)$, ma dobbiamo ancora sviluppare $u_{i+1/2}'''$ e $u_{i-1/2}'''$ in x_i

$$\begin{aligned}
 u_i'' &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h}{6}(u_{i+1/2}''' - u_{i-1/2}''') + O(h^4) \\
 &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h}{6}(u_i''' + \frac{h}{2}u_i^{(4)} - u_i''' + \frac{h}{2}u_i^{(4)} + O(h^2)) + O(h^4) \\
 &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{6}u_i^{(4)} + O(h^3) \\
 &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)
 \end{aligned}$$

- Perciò lo schema $\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$ approssima u_i'' al secondo ordine

Schemi compatti (o hermitiani)

Permettono di ottenere schemi di ordine elevato senza avere uno “stencil” troppo grande

$$\sum_{j=-p}^r (a_j u_{i+j} + b_j u_{i+j}^{(m)}) = O(h^q)$$

con $p \geq 0$, $r \geq 0$ e $\sum_j b_j \neq 0$ (dati).

- I coefficienti a_j sono determinati in funzione del grado di precisione richiesto
- Le relazioni fra i coefficienti si ottengono annullando i termini della serie di Taylor di ordine crescente
- In genere non si ha un'espressione esplicita di $u_i^{(m)} \Rightarrow$ Gli $u_i^{(m)}$ possono essere ottenuti in funzione degli u_j tramite la risoluzione di un sistema lineare

Gli sviluppi di Taylor di u_{i+j} e u'_{i+j} nell'intorno di x_i sono:

$$u_{i+j} = u_i + \sum_{k=1} \frac{(jh)^k}{k!} u_i^{(k)} \quad \text{e} \quad u'_{i+j} = u'_i + \sum_{k=1} \frac{(jh)^k}{k!} u_i^{(k+1)}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=-p}^r (a_j u_{i+j} + b_j u'_{i+j}) &= \sum_{j=-p}^r \left[a_j \left(u_i + \sum_{k=1} \frac{(jh)^k}{k!} u_i^{(k)} \right) + b_j \left(u'_i + \sum_{k=1} \frac{(jh)^k}{k!} u_i^{(k+1)} \right) \right] \\ &= u_i \sum_{j=-p}^r a_j + u'_i \sum_{j=-p}^r (jha_j + b_j) + \sum_{k=2} \frac{h^k}{k!} u_i^{(k)} \sum_{j=-p}^r j^k a_j + \sum_{k=1} \frac{h^k}{k!} u_i^{(k+1)} \sum_{j=-p}^r j^k b_j \\ &= u_i \sum_{j=-p}^r a_j + u'_i \sum_{j=-p}^r (jha_j + b_j) + \sum_{k=2}^q \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} u_i^{(k)} \sum_{j=-p}^r \left(\frac{jha_j}{k} + b_j \right) j^{k-1} + O(h^q) \end{aligned}$$

Gli sviluppi di Taylor di u_{i+j} e u'_{i+j} nell'intorno di x_i sono:

$$u_{i+j} = u_i + \sum_{k=1} \frac{(jh)^k}{k!} u_i^{(k)} \quad \text{e} \quad u'_{i+j} = u'_i + \sum_{k=1} \frac{(jh)^k}{k!} u_i^{(k+1)}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=-p}^r (a_j u_{i+j} + b_j u'_{i+j}) &= \sum_{j=-p}^r \left[a_j \left(u_i + \sum_{k=1} \frac{(jh)^k}{k!} u_i^{(k)} \right) + b_j \left(u'_i + \sum_{k=1} \frac{(jh)^k}{k!} u_i^{(k+1)} \right) \right] \\ &= u_i \sum_{j=-p}^r a_j + u'_i \sum_{j=-p}^r (jha_j + b_j) + \sum_{k=2} \frac{h^k}{k!} u_i^{(k)} \sum_{j=-p}^r j^k a_j + \sum_{k=1} \frac{h^k}{k!} u_i^{(k+1)} \sum_{j=-p}^r j^k b_j \\ &= u_i \sum_{j=-p}^r a_j + u'_i \sum_{j=-p}^r (jha_j + b_j) + \sum_{k=2}^q \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} u_i^{(k)} \sum_{j=-p}^r \left(\frac{jha_j}{k} + b_j \right) j^{k-1} + O(h^q) \end{aligned}$$

- Fissato q possiamo calcolare i vari a_j imponendo a zero i termini in **rosso**
- Gli indici p e r vanno scelti in modo da avere un numero di equazioni lineari uguali al numero di incognite

Approssimazione della derivata prima per griglie non uniformi

Se la discretizzazione ha i passi h_i disuguali ($x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$) abbiamo

$$u_{i+1} = u_i + h_{i+1}u'_i + \frac{h_{i+1}^2}{2}u''_i + \frac{h_{i+1}^3}{6}u'''_i + O(h_{i+1}^4)$$

$$u_{i-1} = u_i - h_i u'_i + \frac{h_i^2}{2}u''_i - \frac{h_i^3}{6}u'''_i + O(h_i^4)$$

Approssimazione della derivata prima per griglie non uniformi

Se la discretizzazione ha i passi h_i disuguali ($x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$) abbiamo

$$u_{i+1} = u_i + h_{i+1}u'_i + \frac{h_{i+1}^2}{2}u''_i + \frac{h_{i+1}^3}{6}u'''_i + O(h_{i+1}^4)$$

$$u_{i-1} = u_i - h_i u'_i + \frac{h_i^2}{2}u''_i - \frac{h_i^3}{6}u'''_i + O(h_i^4)$$

perciò abbiamo

$$\frac{1}{h_{i+1} + h_i} \left[\frac{h_i}{h_{i+1}} (u_{i+1} - u_i) + \frac{h_{i+1}}{h_i} (u_i - u_{i-1}) \right] = u'_i + \frac{h_i h_{i+1}}{6} u'''_i + \dots$$

Approssimazione della derivata seconda per griglie non uniformi

$$\frac{2}{(h_{i+1} + h_i)} \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] = u_i'' - \frac{(h_{i+1} - h_i)}{3} u_i''' + \frac{h_{i+1}^3 + h_i^3}{12(h_{i+1} + h_i)} u_i^{(4)} + \dots$$

Approssimazione della derivata seconda per griglie non uniformi

$$\frac{2}{(h_{i+1} + h_i)} \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] = u_i'' - \frac{(h_{i+1} - h_i)}{3} u_i''' + \frac{h_{i+1}^3 + h_i^3}{12(h_{i+1} + h_i)} u_i^{(4)} + \dots$$

- L'errore di troncamento dipende dalla differenza tra due passi successivi
- Se c'è una variazione troppo grande tra due passi, allora lo schema diventa preciso solo al primo ordine

Approssimazione di un problema ai limiti (1D) di ordine 2

Problema: deformazione di una barra sottoposta a un carico $f(x)$

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x) & x \in (a, b) & g(x) \geq 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Approssimazione di un problema ai limiti (1D) di ordine 2

Problema: deformazione di una barra sottoposta a un carico $f(x)$

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x) & x \in (a, b) & g(x) \geq 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

- Discretizziamo l'intervallo $[a, b]$ in $N + 2$ punti $\Rightarrow x_i = a + hi$ con $i = 0, \dots, N + 1$ e $h = \frac{b-a}{N+1}$
- Con l'approssimazione alle differenze finite il problema diventa:

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + g_i u_i = f_i & i = 1, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

che può essere scritta in forma matriciale come $A_h \mathbf{u} = \mathbf{b}_h$, dove

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 + g_1 h^2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 + g_2 h^2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 + g_N h^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_h = \begin{pmatrix} h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_N \end{pmatrix}$$

Proprietà di convergenza

- Consideriamo l'equazione differenziale $Lu = f$ (più le condizioni al contorno)
- Nel metodo delle differenze finite, come approssimazione di u , si calcola il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema lineare

$$\mathbf{A}_h \mathbf{u} = \mathbf{f}_h$$

Proprietà di convergenza

- Consideriamo l'equazione differenziale $Lu = f$ (più le condizioni al contorno)
- Nel metodo delle differenze finite, come approssimazione di u , si calcola il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema lineare

$$\mathbf{A}_h \mathbf{u} = \mathbf{f}_h$$

- Si dice che la soluzione approssimata *converge* alla soluzione esatta se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_h^e - \mathbf{u}_h\| = 0$$

dove $\mathbf{u}_h^e = (u(x_1), \dots, u(x_n))^T$ è il vettore dei valori della soluzione vera nei nodi della griglia

Proprietà di convergenza

- Consideriamo l'equazione differenziale $Lu = f$ (più le condizioni al contorno)
- Nel metodo delle differenze finite, come approssimazione di u , si calcola il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema lineare

$$\mathbf{A}_h \mathbf{u} = \mathbf{f}_h$$

- Si dice che la soluzione approssimata *converge* alla soluzione esatta se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_h^e - \mathbf{u}_h\| = 0$$

dove $\mathbf{u}_h^e = (u(x_1), \dots, u(x_n))^T$ è il vettore dei valori della soluzione vera nei nodi della griglia

- Se uno schema è *consistente e stabile*, allora è *convergente* (teorema di Lax-Richtmyer) \Rightarrow Verifica della stabilità
- La *stabilità* si ha se gli errori locali sulla soluzione “non esplodono” per $h \rightarrow 0$, e ciò equivale a trovare una maggiorazione, in qualche norma, della matrice \mathbf{A}_h^{-1} indipendente da h

Proprietà di convergenza: esempio 1D

- Per ogni $i = 1, \dots, N$ abbiamo:

$$-u_i'' + g_i u_i = -\frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i)) + g_i u_i$$

f_i

- La soluzione esatta nei nodi \mathbf{u}_h^e si ottiene risolvendo

$$A_h \mathbf{u}_h^e = \mathbf{f} + \mathbf{z}_h(u)$$

dove $(\mathbf{z}_h(u))_i = \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i))$ è l'*errore di troncamento*

- Una stima di $\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^e\|$ è data da:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^e - \mathbf{u}_h\|_\infty &= \|A_h^{-1} \mathbf{z}_h(u)\|_\infty \\ &\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|\mathbf{z}_h(u)\|_\infty = \frac{h^2}{12} \|A_h^{-1}\|_\infty \|u^{(4)}\|_\infty \end{aligned}$$

- Dobbiamo perciò fornire una maggiorazione di $\|A_h^{-1}\|_\infty$

Proprietà di convergenza: esempio 1D

- Sia \widehat{A}_h la matrice corrispondente al caso $g(x) = 0$
- Per ogni $i, j = 1, \dots, N$ si ha $(\widehat{A}_h^{-1})_{ij} \geq (A_h^{-1})_{ij}$ e quindi $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \|\widehat{A}_h^{-1}\|_\infty$
- Consideriamo il problema ai limiti $\begin{cases} -w''(x) = 1 \\ w(a) = w(b) = 0 \end{cases}$ la cui soluzione esatta è $w(x) = \frac{1}{2}(a-x)(x-b)$, mentre la soluzione del problema discretizzato è $\mathbf{w}_h = \widehat{A}_h^{-1} \mathbf{1}$
- Poiché la soluzione esatta è un polinomio di secondo grado, la soluzione del problema discretizzato coincide (nei punti della griglia) con $w(x)$ (ovvero non abbiamo errore di troncamento), quindi:

$$\|\widehat{A}_h^{-1}\|_\infty = \|\widehat{A}_h^{-1} \mathbf{1}\|_\infty = \|\mathbf{w}_h\|_\infty \leq \|w(x)\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{(a-x)(x-b)}{2} \right| = \frac{(b-a)^2}{8}$$

- In definitiva, se $u \in C^4([a, b])$, l'errore globale è maggiorato da

$$\|\mathbf{u}_h^e - \mathbf{u}_h\|_\infty \leq h^2 \frac{(b-a)^2}{96} \|u^{(4)}\|_\infty$$

Approssimazione del Laplaciano in 2D: $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$

- Sia $\Delta_x = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta_y = y_{i+1} - y_i$
- Notazione: $u_{i,j} = u(x_i, y_j) = u(x_0 + i\Delta_x, y_0 + j\Delta_y)$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2} + O(\Delta_x^2)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_y^2} + O(\Delta_y^2)$$

- Perciò $(\nabla^2 u)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_y^2} + O(h^2)$, dove

$$h = \max(\Delta_x, \Delta_y)$$

- Se inoltre $\Delta_x = \Delta_y = h$ si ha

$$(\nabla^2 u)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Metodi alle differenze finite in 2D: equazione di Poisson

Cerchiamo $u(x,y)$ tale che $\begin{cases} -\nabla^2 u = f & \text{sul quadrato } (0,1) \times (0,1) \\ u = 0 & \text{sulla frontiera} \end{cases}$

- Supponiamo che $h = \Delta_x = \Delta_y = \frac{1}{N}$
- Si può allora usare un unico indice $k = (j-1)N + i$
- Lo schema alle differenze finite centrato a 5 punti che discretizza questo problema è allora

$$-\frac{1}{h^2}(u_{k+N} + u_{k+1} - 4u_k + u_{k-1} + u_{k-n}) = f_i$$

- Otteniamo un sistema lineare dove la matrice associata è *la matrice del potenziale*, ed è
 - sparsa tridiagonale a blocchi
 - a predominanza diagonale
 - simmetrica e definita positiva