

Soluzioni Analitiche e Numeriche Applicate all'Ingegneria Ambientale

Massimiliano Martinelli
massimiliano.martinelli@gmail.com

Università Politecnica delle Marche, Ancona
Facoltà di Ingegneria

28-29 Gennaio 2009

Outline

- 1 Introduzione
- 2 Metodi numerici per la risoluzione di sistemi lineari
 - Metodi diretti
 - Metodi iterativi

Outline

1 Introduzione

2 Metodi numerici per la risoluzione di sistemi lineari

- Metodi diretti
- Metodi iterativi

Metodi iterativi

- La matrice del sistema non viene modificata \Rightarrow migliore sfruttamento della sparsità
- Soluzione come limite di una successione \Rightarrow si pone il problema della *convergenza* (e anche della *velocità di convergenza*)
- Per matrici piene $O(n^2)$ operazioni ogni iterazione \Rightarrow metodi iterativi meno costosi dei metodi diretti se si ottiene la convergenza in un numero di iterazioni che dipende da n in modo sublineare
- Possibilità di utilizzare approcci *matrix-free*
- I metodi iterativi si possono applicare anche alla risoluzione di sistemi non-lineari

Principio dei metodi iterativi

Data una stima iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ della soluzione del problema, si costruisce una successione di vettori $\mathbf{x}^{(k)}$ che verifica la proprietà di *convergenza*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$$

Principio dei metodi iterativi

Data una stima iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ della soluzione del problema, si costruisce una successione di vettori $\mathbf{x}^{(k)}$ che verifica la proprietà di *convergenza*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$$

Il metodo iterativo può essere scritto nella forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}_{k+1}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-m)}, A, \mathbf{b}) \quad \text{per } k \geq m$$

dove $\boldsymbol{\varphi}_k$ e $\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ sono rispettivamente funzioni e vettori dati.

Principio dei metodi iterativi

Data una stima iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ della soluzione del problema, si costruisce una successione di vettori $\mathbf{x}^{(k)}$ che verifica la proprietà di *convergenza*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$$

Il metodo iterativo può essere scritto nella forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}_{k+1}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-m)}, A, \mathbf{b}) \quad \text{per } k \geq m$$

dove $\boldsymbol{\varphi}_k$ e $\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ sono rispettivamente funzioni e vettori dati.

- m è chiamato *ordine del metodo*
- se le funzioni $\boldsymbol{\varphi}_k$ non dipendono dal passo k , il metodo è detto *stazionario*, altrimenti *non-stazionario*
- se le funzioni $\boldsymbol{\varphi}_k$ dipendono linearmente dai vettori $\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ il metodo è chiamato *lineare*, altrimenti *non-lineare*

Metodi iterativi lineari

Consistenza con il sistema lineare

Sia $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (*matrice di iterazione*). Il metodo iterativo lineare

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$$

è detto essere *consistente* con il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

o, equivalentemente

$$\mathbf{f} = (I - B)A^{-1}\mathbf{b}$$

Metodi iterativi lineari

Consistenza con il sistema lineare

Sia $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (*matrice di iterazione*). Il metodo iterativo lineare

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$$

è detto essere *consistente* con il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

o, equivalentemente

$$\mathbf{f} = (I - B)A^{-1}\mathbf{b}$$

La sola consistenza non è sufficiente per la convergenza

Metodi iterativi lineari

Consistenza con il sistema lineare

Sia $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (*matrice di iterazione*). Il metodo iterativo lineare

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$$

è detto essere *consistente* con il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

o, equivalentemente

$$\mathbf{f} = (I - B)A^{-1}\mathbf{b}$$

La sola consistenza non è sufficiente per la convergenza

Convergenza di un metodo iterativo consistente

La sequenza di vettori $\mathbf{x}^{(k)}$ converge alla soluzione \mathbf{x} del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per qualsiasi scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$ se e solo se $\rho(B) < 1$

Metodi iterativi lineari

Tecnica dello splitting

- Scegliere due matrici P e N tali che $A = P - N$

Metodi iterativi lineari

Tecnica dello splitting

- Scegliere due matrici P e N tali che $A = P - N$
- P (*matrice di preconditionamento*) deve essere non singolare e “facilmente” invertibile

Metodi iterativi lineari

Tecnica dello splitting

- Scegliere due matrici P e N tali che $A = P - N$
- P (*matrice di preconditionamento*) deve essere non singolare e “facilmente” invertibile
- Dato $\mathbf{x}^{(0)}$, un metodo iterativo lineare e consistente si scrive come

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad k \geq 0$$

Metodi iterativi lineari

Tecnica dello splitting

- Scegliere due matrici P e N tali che $A = P - N$
- P (*matrice di preconditionamento*) deve essere non singolare e “facilmente” invertibile
- Dato $\mathbf{x}^{(0)}$, un metodo iterativo lineare e consistente si scrive come

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad k \geq 0$$

ovvero, introducendo il *residuo* al passo k

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$$

si ottiene

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

Metodi iterativi lineari

Tecnica dello splitting

- Scegliere due matrici P e N tali che $A = P - N$
- P (*matrice di preconditionamento*) deve essere non singolare e “facilmente” invertibile
- Dato $\mathbf{x}^{(0)}$, un metodo iterativo lineare e consistente si scrive come

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad k \geq 0$$

ovvero, introducendo il *residuo* al passo k

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$$

si ottiene

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

- La matrice di iterazione è $B = P^{-1}N$
- $\mathbf{f} = P^{-1}\mathbf{b}$

- Scriviamo $A = D - E - F$
- D è la matrice diagonale uguale agli elementi diagonali di A , e sia D invertibile (ovvero $d_{ii} = a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$)
- E è la matrice di elementi $e_{ij} = -a_{ij}$ se $i > j$, $e_{ij} = 0$ se $i \leq j$
- F è la matrice di elementi $f_{ij} = -a_{ij}$ se $j > i$, $f_{ij} = 0$ se $j \leq i$

- Scriviamo $A = D - E - F$
- D è la matrice diagonale uguale agli elementi diagonali di A , e sia D invertibile (ovvero $d_{ii} = a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$)
- E è la matrice di elementi $e_{ij} = -a_{ij}$ se $i > j$, $e_{ij} = 0$ se $i \leq j$
- F è la matrice di elementi $f_{ij} = -a_{ij}$ se $j > i$, $f_{ij} = 0$ se $j \leq i$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}}_{-E} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{1,n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{-F}$$

Metodi iterativi lineari

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad \text{dove} \quad A = P - N$$

Metodo di Jacobi: $P = D$ e $N = E + F$

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = (E + F)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

Metodi iterativi lineari

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad \text{dove} \quad A = P - N$$

Metodo di Jacobi: $P = D$ e $N = E + F$

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = (E + F)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

- $(D^{-1})_{ii} = \frac{1}{d_{ii}}$
- $B_J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$
- Equivale a

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, n$$

Metodi iterativi lineari

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad \text{dove} \quad A = P - N$$

Metodo di Gauss-Seidel: $P = D - E$ e $N = F$

$$(D - E)\mathbf{x}^{(k+1)} = F\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + (D - E)^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

Metodi iterativi lineari

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad \text{dove} \quad A = P - N$$

Metodo di Gauss-Seidel: $P = D - E$ e $N = F$

$$(D - E)\mathbf{x}^{(k+1)} = F\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + (D - E)^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

- $(D - E)$ è la parte triangolare inferiore di A (invertibile perché gli elementi diagonali non sono nulli)
- $B_{GS} = (D - E)^{-1}F$
- Equivale a

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, n$$

Tecniche di accelerazione della convergenza

Metodo di rilassamento

Si introduce nei metodi precedenti il *parametro di rilassamento* ω da scegliere opportunamente

Metodo di Jacobi

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

- $B_J = I - D^{-1}A$
- Equivale a

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

Tecniche di accelerazione della convergenza

Metodo di rilassamento

Si introduce nei metodi precedenti il *parametro di rilassamento* ω da scegliere opportunamente

Metodo di Jacobi con rilassamento (JOR)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1} \mathbf{r}^{(k)}$$

- $B_{J\omega} = \omega B_J + (1 - \omega)I = I - \omega D^{-1}A$
- Equivale a

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)} \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

- Consistente per ogni $\omega \neq 0$ ($\omega = 1$ metodo di Jacobi)

Tecniche di accelerazione della convergenza

Metodo di Gauss-Seidel

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + (D - E)^{-1} \mathbf{r}^{(k)}$$

- $B_{GS} = (D - E)^{-1} F$
- Equivale a

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

Tecniche di accelerazione della convergenza

Metodo di Gauss-Seidel con rilassamento (SOR)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

- $B_{GS\omega} = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + F\right]$
- Equivale a

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega)x_i^{(k)} \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

- Consistente per ogni $\omega \neq 0$ ($\omega = 1$ metodo di Gauss-Seidel)

Alcuni risultati di convergenza

- Se A è strettamente diagonale dominante per righe, i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti
- Se A è simmetrica e definita positiva, il metodo JOR è convergente con $0 < \omega < 2/\rho(D^{-1}A)$
- Se il metodo di Jacobi è convergente, allora il metodo JOR converge per $0 < \omega \leq 1$
- Per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ si ha $\rho(B_{GS_\omega}) \geq |\omega - 1|$; perciò il metodo SOR non converge se $\omega \leq 0$ o $\omega \geq 2$
- **(Teorema di Ostrowski)** Se A è simmetrica e definita positiva, allora il metodo SOR converge se e solo se $0 < \omega < 2$. Inoltre, la sua convergenza è monotona rispetto ad $\|\cdot\|_A$ (ovvero $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A < \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A$)

Metodi di Richardson

Il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^k$ può essere generalizzato da

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k P^{-1}\mathbf{r}^k \quad \text{con } \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Metodi di Richardson

Il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^k$ può essere generalizzato da

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k P^{-1}\mathbf{r}^k \quad \text{con} \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

- La matrice di iterazione è $R(\alpha_k) = I - \alpha_k P^{-1}A$

Metodi di Richardson

Il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^k$ può essere generalizzato da

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k P^{-1}\mathbf{r}^k \quad \text{con} \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

- La matrice di iterazione è $R(\alpha_k) = I - \alpha_k P^{-1}A$
- Se $\alpha_k = \alpha \Rightarrow$ *metodo di Richardson stazionario*
- I metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono metodi di Richardson stazionari

Metodi di Richardson

Il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^k$ può essere generalizzato da

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k P^{-1}\mathbf{r}^k \quad \text{con} \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

- La matrice di iterazione è $R(\alpha_k) = I - \alpha_k P^{-1}A$
- Se $\alpha_k = \alpha \Rightarrow$ *metodo di Richardson stazionario*
- I metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono metodi di Richardson stazionari

Algoritmo per il metodo di Richardson

- 1 $\mathbf{x}^{(k)}$ soluzione approssimata al passo k
- 2 Calcolo del residuo: $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$
- 3 Soluzione del sistema lineare $P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$
- 4 Calcolo del parametro di accelerazione α_k
- 5 Aggiornamento della soluzione al passo $k + 1$: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}$

Metodi di Richardson

Il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^k$ può essere generalizzato da

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k P^{-1}\mathbf{r}^k \quad \text{con} \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

- La matrice di iterazione è $R(\alpha_k) = I - \alpha_k P^{-1}A$
- Se $\alpha_k = \alpha \Rightarrow$ *metodo di Richardson stazionario*
- I metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono metodi di Richardson stazionari

Algoritmo per il metodo di Richardson

- 1 $\mathbf{x}^{(k)}$ soluzione approssimata al passo k
- 2 Calcolo del residuo: $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$
- 3 Soluzione del sistema lineare $P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$
- 4 **Calcolo del parametro di accelerazione α_k**
- 5 Aggiornamento della soluzione al passo $k + 1$: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}$

Metodo di Richardson: analisi di convergenza

Per ogni matrice invertibile P , il metodo di Richardson stazionario è convergente se e solo se

$$\frac{2 \operatorname{Re} \lambda_i}{\alpha |\lambda_i|^2} > 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

dove $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sono gli autovalori di $P^{-1}A$.

Metodo di Richardson: analisi di convergenza

Per ogni matrice invertibile P , il metodo di Richardson stazionario è convergente se e solo se

$$\frac{2 \operatorname{Re} \lambda_i}{\alpha |\lambda_i|^2} > 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

dove $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sono gli autovalori di $P^{-1}A$.

Se $P^{-1}A$ ha autovalori reali e positivi, allora il metodo di Richardson stazionario è convergente se e solo se

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

inoltre, il raggio spettrale della matrice di iterazione $I - \alpha P^{-1}A$ è minimo per

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$$

Scelta della matrice di preconditionamento P

- Il metodo di Richardson non specifica come scegliere P e, in generale α_k
- Mancanza di risultati teorici riguardo alla scelta ottimale di P

Scelta della matrice di preconditionamento P

- Il metodo di Richardson non specifica come scegliere P e, in generale α_k
- Mancanza di risultati teorici riguardo alla scelta ottimale di P
- Scegliendo $P = A$ si ha convergenza in una iterazione (ma l'obiettivo è proprio risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$)

Scelta della matrice di preconditionamento P

- Il metodo di Richardson non specifica come scegliere P e, in generale α_k
- Mancanza di risultati teorici riguardo alla scelta ottimale di P
- Scegliendo $P = A$ si ha convergenza in una iterazione (ma l'obiettivo è proprio risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$)
- In pratica, si cercano matrici di preconditionamento P tali che $P^{-1}A \approx I$ dove P è facilmente invertibile

Scelta della matrice di preconditionamento P

- Il metodo di Richardson non specifica come scegliere P e, in generale α_k
- Mancanza di risultati teorici riguardo alla scelta ottimale di P
- Scegliendo $P = A$ si ha convergenza in una iterazione (ma l'obiettivo è proprio risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$)
- In pratica, si cercano matrici di preconditionamento P tali che $P^{-1}A \approx I$ dove P è facilmente invertibile
- Diverse strategie per la scelta (e il calcolo) di P :
 - Matrice di preconditionamento diagonale (analoga a quella usata nel metodo di Jacobi)
 - Fattorizzazione LU Incompleta (ILU)
 - Precondizionatori polinomiali (polinomiale di Neumann, “minimi quadrati”, ...)

Scelta della matrice di preconditionamento P

- Il metodo di Richardson non specifica come scegliere P e, in generale α_k
- Mancanza di risultati teorici riguardo alla scelta ottimale di P
- Scegliendo $P = A$ si ha convergenza in una iterazione (ma l'obiettivo è proprio risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$)
- In pratica, si cercano matrici di preconditionamento P tali che $P^{-1}A \approx I$ dove P è facilmente invertibile
- Diverse strategie per la scelta (e il calcolo) di P :
 - Matrice di preconditionamento diagonale (analoga a quella usata nel metodo di Jacobi)
 - **Fattorizzazione LU Incompleta (ILU)**
 - Precondizionatori polinomiali (polinomiale di Neumann, “minimi quadrati”, ...)

Fattorizzazione ILU(p)

ILU(0)

- Sia A una matrice tale che la fattorizzazione LU non richiede il pivoting
- Si costruiscono due matrici \tilde{L} triangolare inferiore e \tilde{U} triangolare superiore tali che:
 - \tilde{L} e \tilde{U} abbiano la stessa struttura di sparsità di $D - E$ e $D - F$
 - $(\tilde{L}\tilde{U})_{ij} = a_{ij}$ se $a_{ij} \neq 0$
- \Rightarrow Stessa quantità di memoria necessaria per A (nessun fill-in)

Fattorizzazione ILU(p)

ILU(0)

- Sia A una matrice tale che la fattorizzazione LU non richiede il pivoting
- Si costruiscono due matrici \tilde{L} triangolare inferiore e \tilde{U} triangolare superiore tali che:
 - \tilde{L} e \tilde{U} abbiano la stessa struttura di sparsità di $D - E$ e $D - F$
 - $(\tilde{L}\tilde{U})_{ij} = a_{ij}$ se $a_{ij} \neq 0$
- \Rightarrow Stessa quantità di memoria necessaria per A (nessun fill-in)
- Permettendo il fill-in si ha una fattorizzazione di A più accurata
- Per esempio si può considerare la fattorizzazione ILU(0) della matrice $\tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow$ ILU(1) e così via \Rightarrow ILU(p)

Fattorizzazione ILU(p)

ILU(0)

- Sia A una matrice tale che la fattorizzazione LU non richiede il pivoting
- Si costruiscono due matrici \tilde{L} triangolare inferiore e \tilde{U} triangolare superiore tali che:
 - \tilde{L} e \tilde{U} abbiano la stessa struttura di sparsità di $D - E$ e $D - F$
 - $(\tilde{L}\tilde{U})_{ij} = a_{ij}$ se $a_{ij} \neq 0$
- \Rightarrow Stessa quantità di memoria necessaria per A (nessun fill-in)
- Permettendo il fill-in si ha una fattorizzazione di A più accurata
- Per esempio si può considerare la fattorizzazione ILU(0) della matrice $\tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow$ ILU(1) e così via \Rightarrow ILU(p)
- L'esistenza della fattorizzazione ILU non è garantita per tutte le matrici invertibili \Rightarrow Esistenza per matrici a diagonale dominante, M -matrici, ...

Fattorizzazione ILU(p)

ILU(0)

- Sia A una matrice tale che la fattorizzazione LU non richiede il pivoting
- Si costruiscono due matrici \tilde{L} triangolare inferiore e \tilde{U} triangolare superiore tali che:
 - \tilde{L} e \tilde{U} abbiano la stessa struttura di sparsità di $D - E$ e $D - F$
 - $(\tilde{L}\tilde{U})_{ij} = a_{ij}$ se $a_{ij} \neq 0$
- \Rightarrow Stessa quantità di memoria necessaria per A (nessun fill-in)
- Permettendo il fill-in si ha una fattorizzazione di A più accurata
- Per esempio si può considerare la fattorizzazione ILU(0) della matrice $\tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow$ ILU(1) e così via \Rightarrow ILU(p)
- L'esistenza della fattorizzazione ILU non è garantita per tutte le matrici invertibili \Rightarrow Esistenza per matrici a diagonale dominante, M -matrici, ...
- Esistono varianti per la riduzione del fill-in (ILUT, MILU, ...)

- Sia A simmetrica e definita positiva e sia $\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T A \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{b}$
- \mathbf{x} è soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y})$

- Sia A simmetrica e definita positiva e sia $\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T A \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{b}$
- \mathbf{x} è soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y})$

Domanda

Come determinare $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che minimizza $\Phi(\mathbf{y})$, partendo da un punto $\mathbf{x}^{(0)}$?

- Sia A simmetrica e definita positiva e sia $\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T A \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{b}$
- \mathbf{x} è soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y})$

Domanda

Come determinare $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che minimizza $\Phi(\mathbf{y})$, partendo da un punto $\mathbf{x}^{(0)}$?

Metodo del gradiente (o Steepest Descent)

- Sia A simmetrica e definita positiva e sia $\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T A \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{b}$
- \mathbf{x} è soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y})$

Domanda

Come determinare $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che minimizza $\Phi(\mathbf{y})$, partendo da un punto $\mathbf{x}^{(0)}$?

Metodo del gradiente (o Steepest Descent)

- Si calcola la direzione di massima pendenza (locale):

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} = -\mathbf{r}^{(k)}$$

- Sia A simmetrica e definita positiva e sia $\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T A \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{b}$
- \mathbf{x} è soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y})$

Domanda

Come determinare $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che minimizza $\Phi(\mathbf{y})$, partendo da un punto $\mathbf{x}^{(0)}$?

Metodo del gradiente (o Steepest Descent)

- Si calcola la direzione di massima pendenza (locale):

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} = -\mathbf{r}^{(k)}$$

- Si cerca un minimo di Φ lungo la direzione $\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)} \Rightarrow$ differenziando $\Phi(\mathbf{x}^{(k+1)}) = \Phi(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)})$ rispetto ad α_k ed uguagliando a zero si ha:

$$\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle}$$

Metodo del gradiente: algoritmo

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, per $k = 0, 1, \dots$

1 $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$

2 $\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle}$

3 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$

Metodo del gradiente: algoritmo

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, per $k = 0, 1, \dots$

1 $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$

2 $\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle}$

3 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$

Metodo del gradiente: convergenza

Sia A una matrice simmetrica e definita positiva. Allora il metodo del gradiente è convergente per ogni scelta del dato iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ e

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_A \leq \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} \|\mathbf{e}^{(k)}\|_A$$

Metodo del gradiente: algoritmo

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, per $k = 0, 1, \dots$

1 $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$

2 $\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle}$

3 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$

Metodo del gradiente: convergenza

Sia A una matrice simmetrica e definita positiva. Allora il metodo del gradiente è convergente per ogni scelta del dato iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ e

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_A \leq \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} \|\mathbf{e}^{(k)}\|_A$$

- Il metodo del gradiente può essere abbastanza lento se $K_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ è grande

- Metodo del gradiente \Rightarrow Scelta di una direzione di discesa ($\nabla\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{r}^{(k)}$)
+ minimizzazione lungo quella direzione

- Metodo del gradiente \Rightarrow Scelta di una direzione di discesa ($\nabla\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{r}^{(k)}$)
+ minimizzazione lungo quella direzione
- Possibili altre scelte per la direzione di discesa

- Metodo del gradiente \Rightarrow Scelta di una direzione di discesa ($\nabla\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{r}^{(k)}$) + minimizzazione lungo quella direzione
- Possibili altre scelte per la direzione di discesa

Ottimalità rispetto ad una direzione

Una direzione $\mathbf{x}^{(k)}$ è detta essere *ottimale* rispetto ad una direzione $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ se

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) \leq \Phi(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda\mathbf{p}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Metodo del gradiente \Rightarrow Scelta di una direzione di discesa ($\nabla\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{r}^{(k)}$) + minimizzazione lungo quella direzione
- Possibili altre scelte per la direzione di discesa

Ottimalità rispetto ad una direzione

Una direzione $\mathbf{x}^{(k)}$ è detta essere *ottimale* rispetto ad una direzione $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ se

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) \leq \Phi(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda\mathbf{p}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Se $\mathbf{x}^{(k)}$ è ottimale rispetto a \mathbf{p} allora Φ ammette un minimo locale lungo \mathbf{p} per $\lambda = 0$, e quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda\mathbf{p}) \right|_{\lambda=0} = \left[\langle \mathbf{p}, (A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}) \rangle + \lambda \langle \mathbf{p}, A\mathbf{p} \rangle \right]_{\lambda=0} \\ &= -\langle \mathbf{p}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \end{aligned}$$

- Metodo del gradiente \Rightarrow Scelta di una direzione di discesa ($\nabla\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{r}^{(k)}$) + minimizzazione lungo quella direzione
- Possibili altre scelte per la direzione di discesa

Ottimalità rispetto ad una direzione

Una direzione $\mathbf{x}^{(k)}$ è detta essere *ottimale* rispetto ad una direzione $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ se

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) \leq \Phi(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda\mathbf{p}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Se $\mathbf{x}^{(k)}$ è ottimale rispetto a \mathbf{p} allora Φ ammette un minimo locale lungo \mathbf{p} per $\lambda = 0$, e quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda\mathbf{p}) \right|_{\lambda=0} = \left[\langle \mathbf{p}, (A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}) \rangle + \lambda \langle \mathbf{p}, A\mathbf{p} \rangle \right]_{\lambda=0} \\ &= -\langle \mathbf{p}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \end{aligned}$$

- $\mathbf{x}^{(k)}$ è ottimale rispetto a $\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{p}$ è ortogonale al residuo $\mathbf{r}^{(k)}$

- Nel metodo del gradiente $\mathbf{x}^{(k+1)}$ è ottimale rispetto a $\mathbf{r}^{(k)}$ (ovvero $\mathbf{r}^{(k+1)} \perp \mathbf{r}^{(k)}$), infatti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle &= \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b} - A \left[\mathbf{x}^{(k)} + \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle} \mathbf{r}^{(k)} \right], \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle} \langle A\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

- Nel metodo del gradiente $\mathbf{x}^{(k+1)}$ è ottimale rispetto a $\mathbf{r}^{(k)}$ (ovvero $\mathbf{r}^{(k+1)} \perp \mathbf{r}^{(k)}$), infatti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle &= \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b} - A \left[\mathbf{x}^{(k)} + \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle} \mathbf{r}^{(k)} \right], \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle} \langle A\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

- La iterata successiva $\mathbf{x}^{(k+2)}$ non è più ottimale rispetto a $\mathbf{r}^{(k)}$

- Nel metodo del gradiente $\mathbf{x}^{(k+1)}$ è ottimale rispetto a $\mathbf{r}^{(k)}$ (ovvero $\mathbf{r}^{(k+1)} \perp \mathbf{r}^{(k)}$), infatti

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle &= \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{b} - A \left[\mathbf{x}^{(k)} + \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle} \mathbf{r}^{(k)} \right], \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle} \langle A\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- La iterata successiva $\mathbf{x}^{(k+2)}$ non è più ottimale rispetto a $\mathbf{r}^{(k)}$

Domanda

Esiste una direzione di discesa che mantiene l'ottimalità delle iterate?

Condizione di ottimalità delle iterate

- Sia $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$ e sia \mathbf{p} ottimale rispetto a $\mathbf{x}^{(k)}$

Condizione di ottimalità delle iterate

- Sia $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$ e sia \mathbf{p} ottimale rispetto a $\mathbf{x}^{(k)}$
- Imponiamo che $\mathbf{x}^{(k+1)}$ sia ottimale rispetto a \mathbf{p} e cerchiamo quale condizione dobbiamo avere su \mathbf{q}

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b} - A[\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}], \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{p} \rangle - \langle A\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{p} \rangle - \langle A\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle \\ &= -\langle A\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle \end{aligned}$$

Condizione di ottimalità delle iterate

- Sia $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$ e sia \mathbf{p} ottimale rispetto a $\mathbf{x}^{(k)}$
- Imponiamo che $\mathbf{x}^{(k+1)}$ sia ottimale rispetto a \mathbf{p} e cerchiamo quale condizione dobbiamo avere su \mathbf{q}

$$\begin{aligned}0 &= \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b} - A[\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}], \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{p} \rangle - \langle A\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{p} \rangle - \langle A\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle \\ &= -\langle A\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle\end{aligned}$$

- \Rightarrow Per mantenere l'ottimalità tra iterate successive, le direzioni di discesa devono essere mutualmente *A-ortogonali* (o *A-coniugate*), ovvero

$$\langle A\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \mathbf{p}^T A\mathbf{q} = 0$$

Costruzione delle direzioni A -coniugate

- Sia $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$, e cerchiamo le direzioni A -coniugate della forma

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$$

con $\beta_k \in \mathbb{R}$ da determinare e tali che

$$\langle A\mathbf{p}^{(k+1)}, \mathbf{p}^{(j)} \rangle = 0 \quad \text{per } j = 0, \dots, k$$

Costruzione delle direzioni A -coniugate

- Sia $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$, e cerchiamo le direzioni A -coniugate della forma

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$$

con $\beta_k \in \mathbb{R}$ da determinare e tali che

$$\langle A\mathbf{p}^{(k+1)}, \mathbf{p}^{(j)} \rangle = 0 \quad \text{per } j = 0, \dots, k$$

- La condizione $\langle A\mathbf{p}^{(k+1)}, \mathbf{p}^{(k)} \rangle = 0$ ci da $\beta_k = \frac{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle}{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)} \rangle}$

Costruzione delle direzioni A -coniugate

- Sia $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$, e cerchiamo le direzioni A -coniugate della forma

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$$

con $\beta_k \in \mathbb{R}$ da determinare e tali che

$$\langle A\mathbf{p}^{(k+1)}, \mathbf{p}^{(j)} \rangle = 0 \quad \text{per } j = 0, \dots, k$$

- La condizione $\langle A\mathbf{p}^{(k+1)}, \mathbf{p}^{(k)} \rangle = 0$ ci da $\beta_k = \frac{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle}{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)} \rangle}$
- Per induzione si dimostra che, scegliendo $\beta_k = \frac{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle}{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)} \rangle}$, le direzioni $\mathbf{p}^{(0)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)}$ sono mutualmente A -coniugate

Metodo del Gradiente Coniugato (CG)

Direzioni di discesa A -coniugate + parametro di accelerazione α_k (come nel metodo di gradiente)

Metodo del Gradiente Coniugato (CG)

Direzioni di discesa A -coniugate + parametro di accelerazione α_k (come nel metodo di gradiente)

Algoritmo

Dato $\mathbf{x}^{(0)}$, sia $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ e $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$. Per $k = 0, \dots$

$$\textcircled{1} \quad \alpha_k = \frac{\langle \mathbf{p}^k, \mathbf{r}^k \rangle}{\langle \mathbf{p}^k, A\mathbf{p}^k \rangle} = \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2}{\langle \mathbf{p}^k, A\mathbf{p}^k \rangle}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)}$$

$$\textcircled{4} \quad \beta_k = \frac{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle}{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)} \rangle} = \frac{\|\mathbf{r}^{(k+1)}\|_2^2}{\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2}$$

$$\textcircled{5} \quad \mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$$

Metodo del Gradiente Coniugato (CG)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica e definita positiva. Qualsiasi metodo che utilizzi le direzioni coniugate per risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ termina al massimo dopo n passi, fornendo la soluzione esatta.

Metodo del Gradiente Coniugato (CG)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica e definita positiva. Qualsiasi metodo che utilizzi le direzioni coniugate per risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ termina al massimo dopo n passi, fornendo la soluzione esatta.

Convergenza per il metodo del Gradiente Coniugato

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica e definita positiva. Il metodo del Gradiente Coniugato converge al massimo in n passi, ed inoltre l'errore alla k -esima iterazione $\mathbf{e}^{(k)}$ (con $k < n$) è ortogonale a $\mathbf{p}^{(j)}$ per $j = 0, \dots, k-1$ e

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A \leq \frac{2c^k}{1+c^{2k}} \|\mathbf{e}^{(0)}\|_A \quad \text{con} \quad c = \frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1}$$

Metodo del Gradiente Coniugato Precondizionato (PCG)

Invece di risolvere $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si risolve $P\mathbf{Ax} = P\mathbf{b}$ con P simmetrica e definita positiva (e facilmente invertibile)

Metodo del Gradiente Coniugato Precondizionato (PCG)

Invece di risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si risolve $P\mathbf{Ax} = P\mathbf{b}$ con P simmetrica e definita positiva (e facilmente invertibile)

Algoritmo

Dato $\mathbf{x}^{(0)}$, sia $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{z}^{(0)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(0)}$ e $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{z}^{(0)}$. Per $k = 0, \dots$

- 1 $\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{p}^k, \mathbf{r}^k \rangle}{\langle \mathbf{p}^k, A\mathbf{p}^k \rangle}$
- 2 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$
- 3 $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)}$
- 4 $\mathbf{z}^{(k+1)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(k+1)}$
- 5 $\beta_k = \frac{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k+1)} \rangle}{\langle A\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)} \rangle}$
- 6 $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$

Gradiente Coniugato per matrici qualsiasi

- Se la matrice A non è simmetrica e definita positiva, non si può più applicare il metodo del Gradiente Coniugato

Gradiente Coniugato per matrici qualsiasi

- Se la matrice A non è simmetrica e definita positiva, non si può più applicare il metodo del Gradiente Coniugato
- Considerare allora $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ (chiamato *sistema di equazioni normali*)

Gradiente Coniugato per matrici qualsiasi

- Se la matrice A non è simmetrica e definita positiva, non si può più applicare il metodo del Gradiente Coniugato
- Considerare allora $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ (chiamato *sistema di equazioni normali*)
- Se A è non singolare, allora $A^T A$ è simmetrica e definita positiva

Gradiente Coniugato per matrici qualsiasi

- Se la matrice A non è simmetrica e definita positiva, non si può più applicare il metodo del Gradiente Coniugato
- Considerare allora $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ (chiamato *sistema di equazioni normali*)
- Se A è non singolare, allora $A^T A$ è simmetrica e definita positiva
- L'algoritmo converge sempre al più in n iterazioni

Gradiente Coniugato per matrici qualsiasi

- Se la matrice A non è simmetrica e definita positiva, non si può più applicare il metodo del Gradiente Coniugato
- Considerare allora $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ (chiamato *sistema di equazioni normali*)
- Se A è non singolare, allora $A^T A$ è simmetrica e definita positiva
- L'algoritmo converge sempre al più in n iterazioni
- Per tale algoritmo il costo per iterazione è superiore ed inoltre

$$K_2(A^T A) = [K_2(A)]^2$$

Metodi di Krylov

- Risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a risolvere $A\mathbf{z} = \mathbf{r}^{(0)}$ dove $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}$

Metodi di Krylov

- Risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a risolvere $A\mathbf{z} = \mathbf{r}^{(0)}$ dove $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}$
- Si chiamano *metodi di Krylov* tutti i metodi che permettono di ottenere la soluzione del sistema $A\mathbf{z} = \mathbf{r}^{(0)}$ per proiezione sui *sottospazi di Krylov*

$$K_m(A; \mathbf{v}) = \text{span}(\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \dots, A^{m-1}\mathbf{v}),$$

ovvero tramite il procedimento iterativo seguente

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)} \quad \text{con} \quad \mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A; \mathbf{r}^{(0)})$$

Metodi di Krylov

- Risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a risolvere $A\mathbf{z} = \mathbf{r}^{(0)}$ dove $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}$
- Si chiamano *metodi di Krylov* tutti i metodi che permettono di ottenere la soluzione del sistema $A\mathbf{z} = \mathbf{r}^{(0)}$ per proiezione sui *sottospazi di Krylov*

$$K_m(A; \mathbf{v}) = \text{span}(\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \dots, A^{m-1}\mathbf{v}),$$

ovvero tramite il procedimento iterativo seguente

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)} \quad \text{con} \quad \mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A; \mathbf{r}^{(0)})$$

- I diversi metodi si differenziano nel modo in cui viene calcolato $\mathbf{y}^{(k)}$ (e quindi $\mathbf{x}^{(k)}$)
- In particolare, il metodo di Richardson non preconditionato e il metodo del gradiente coniugato sono metodi di Krylov

Metodi di Krylov

- Risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a risolvere $A\mathbf{z} = \mathbf{r}^{(0)}$ dove $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}$
- Si chiamano *metodi di Krylov* tutti i metodi che permettono di ottenere la soluzione del sistema $A\mathbf{z} = \mathbf{r}^{(0)}$ per proiezione sui *sottospazi di Krylov*

$$K_m(A; \mathbf{v}) = \text{span}(\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \dots, A^{m-1}\mathbf{v}),$$

ovvero tramite il procedimento iterativo seguente

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)} \quad \text{con} \quad \mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A; \mathbf{r}^{(0)})$$

- I diversi metodi si differenziano nel modo in cui viene calcolato $\mathbf{y}^{(k)}$ (e quindi $\mathbf{x}^{(k)}$)
- In particolare, il metodo di Richardson non preconditionato e il metodo del gradiente coniugato sono metodi di Krylov
- Per un m fissato, è possibile costruire una base ortonormale di $K_m(A; \mathbf{r}^{(0)})$ utilizzando l'*Algoritmo di Arnoldi*

Algoritmo di Arnoldi

Si tratta di costruire una base ortonormale $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ per lo spazio $K_m(A; \mathbf{v}_1)$ utilizzando la procedura di Gram-Schmidt

Algoritmo di Arnoldi

Si tratta di costruire una base ortonormale $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ per lo spazio $K_m(A; \mathbf{v}_1)$ utilizzando la procedura di Gram-Schmidt

Il primo elemento della base è $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{r}^{(0)}}{\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2}$. Per $k = 1, \dots, m$

1 $h_{ik} = \langle \mathbf{v}_i, A\mathbf{v}_k \rangle, \quad i = 1, \dots, k$

2 $\mathbf{w}_k = A\mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^k h_{ik}\mathbf{v}_i$

3 $h_{k+1,k} = \|\mathbf{w}_k\|_2$

4 $\mathbf{v}_{k+1} = \frac{\mathbf{w}_k}{h_{k+1,k}}$

Sia V_m è la matrice le cui colonne sono i vettori $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, allora ogni vettore $\mathbf{y}^{(m)} \in K_m(A; \mathbf{r}^0)$ può essere scritto come $\mathbf{y}^{(m)} = V_m \mathbf{z}^{(m)}$ con $V_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{z}^{(m)} \in \mathbb{R}^m$ e $m \leq n$

Sia V_m è la matrice le cui colonne sono i vettori $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, allora ogni vettore $\mathbf{y}^{(m)} \in K_m(A; \mathbf{r}^0)$ può essere scritto come $\mathbf{y}^{(m)} = V_m \mathbf{z}^{(m)}$ con $V_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{z}^{(m)} \in \mathbb{R}^m$ e $m \leq n$

Sia $\hat{H}_m \in \mathbb{R}^{(m+1) \times m}$ la matrice di Hessemberg superiore in cui gli elementi non nulli sono definiti dall'algoritmo di Arnoldi

$$\begin{cases} h_{ik} = \langle \mathbf{v}_i, A\mathbf{v}_k \rangle & k = 1, \dots, m \text{ e } i = 1, \dots, k \\ h_{k+1,k} = \left\| A\mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^k h_{ik} \mathbf{v}_i \right\|_2 & k = 1, \dots, m \end{cases}$$

e sia $H_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la matrice ottenuta da \hat{H}_m eliminando l'ultima riga. Allora valgono le seguenti relazioni:

- 1 $AV_m = V_{m+1} \hat{H}_m$
- 2 $V_m^T AV_m = H_m$
- 3 $V_{m+1}^T AV_m = \hat{H}_m$

Due diverse strategie per calcolare $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)}$

Due diverse strategie per calcolare $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)}$

- Calcolare $\mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$ imponendo che il residuo $\mathbf{r}^{(k)}$ sia ortogonale a ogni vettore in $K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$, ovvero

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$$

\Rightarrow *Full Orthogonalization Method (FOM)*

Due diverse strategie per calcolare $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)}$

- Calcolare $\mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$ imponendo che il residuo $\mathbf{r}^{(k)}$ sia ortogonale a ogni vettore in $K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$, ovvero

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$$

\Rightarrow *Full Orthogonalization Method (FOM)*

- Calcolare $\mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$ minimizzando la norma Euclidea del residuo $\mathbf{r}^{(k)}$, cioè:

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\|_2 = \min_{\mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})} \|\mathbf{b} - A(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)})\|_2$$

\Rightarrow *Generalized Minumun RESidual (GMRES)*

Due diverse strategie per calcolare $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)}$

- Calcolare $\mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$ imponendo che il residuo $\mathbf{r}^{(k)}$ sia ortogonale a ogni vettore in $K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$, ovvero

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$$

\Rightarrow *Full Orthogonalization Method (FOM)*

- Calcolare $\mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$ minimizzando la norma Euclidea del residuo $\mathbf{r}^{(k)}$, cioè:

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\|_2 = \min_{\mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})} \|\mathbf{b} - A(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)})\|_2$$

\Rightarrow *Generalized Minumun RESidual (GMRES)*

- In assenza di errori di arrotondamento, FOM e GMRES forniscono la soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in al più n iterazioni
- Possibilità di preconditionamento per accelerare la convergenza

GMRES

Calcolare $\mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$ minimizzando la norma Euclidea del residuo $\mathbf{r}^{(k)}$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\|_2 &= \min_{\mathbf{y}^{(k)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})} \|\mathbf{b} - A(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(k)})\|_2 \\ &= \min_{\mathbf{z}^{(k)} \in \mathbb{R}^k} \|\mathbf{b} - A(\mathbf{x}^{(0)} + V_k \mathbf{z}^{(k)})\|_2 \\ &= \min_{\mathbf{z}^{(k)} \in \mathbb{R}^k} \|\mathbf{r}^{(0)} - AV_k \mathbf{z}^{(k)}\|_2 \\ &= \min_{\mathbf{z}^{(k)} \in \mathbb{R}^k} \left\| \mathbf{v}_1 \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 - V_{k+1} \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \right\|_2 \\ &= \min_{\mathbf{z}^{(k)} \in \mathbb{R}^k} \left\| V_{k+1} \left(\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \right) \right\|_2 \\ &= \min_{\mathbf{z}^{(k)} \in \mathbb{R}^k} \left\| \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \right\|_2\end{aligned}$$

dove $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$

GMRES (continua)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2 &= \left\| \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \right\|_2^2 \\ &= \langle \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}, \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle \\ &= \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2^2 - 2\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \langle \mathbf{e}_1, \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle + \langle \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}, \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle\end{aligned}$$

GMRES (continua)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2 &= \left\| \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \right\|_2^2 \\ &= \langle \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}, \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle \\ &= \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2^2 - 2\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \langle \mathbf{e}_1, \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle + \langle \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}, \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle\end{aligned}$$

Il minimo di $\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2$ è un punto stazionario, perciò differenziamo rispetto a $\mathbf{z}^{(k)}$ e uguagliamo a zero:

GMRES (continua)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2 &= \left\| \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \right\|_2^2 \\ &= \langle \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}, \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle \\ &= \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2^2 - 2\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \langle \mathbf{e}_1, \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle + \langle \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}, \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle\end{aligned}$$

Il minimo di $\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2$ è un punto stazionario, perciò differenziamo rispetto a $\mathbf{z}^{(k)}$ e uguagliamo a zero:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^{(k)}} \|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2 \\ &= -2\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \hat{H}_k^T \mathbf{e}_1 + 2\hat{H}_k^T \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}\end{aligned}$$

GMRES (continua)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2 &= \left\| \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \right\|_2^2 \\ &= \langle \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}, \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1 - \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle \\ &= \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2^2 - 2\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \langle \mathbf{e}_1, \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle + \langle \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}, \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} \rangle\end{aligned}$$

Il minimo di $\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2$ è un punto stazionario, perciò differenziamo rispetto a $\mathbf{z}^{(k)}$ e uguagliamo a zero:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^{(k)}} \|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2 \\ &= -2\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \hat{H}_k^T \mathbf{e}_1 + 2\hat{H}_k^T \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)}\end{aligned}$$

ovvero

$$\hat{H}_k^T \hat{H}_k \mathbf{z}^{(k)} = \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \hat{H}_k^T \mathbf{e}_1$$

(sistema di equazioni normali)

Criteri di convergenza

Controllo dell'incremento

- L'algoritmo iterativo si ferma se viene verificata la condizione

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}^{(k)}\|$$

in cui ε è una tolleranza prefissata

- Nel caso di un metodo basato sullo splitting additivo, in cui B è la matrice di iterazione, abbiamo la seguente stima dell'errore commesso

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|\mathbf{x}^{(k)}\|$$

Controllo del residuo

- L'algoritmo iterativo si ferma quando $\|\mathbf{r}^{(k)}\| \leq \varepsilon$ oppure $\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{r}^{(0)}\|} \leq \varepsilon$