Modello SIRD.

1 Il modello

Consideriamo quattro popolazioni: i suscettibili S, i contagiati I, i guariti R e i deceduti D su una popolazione totale di N individui. Ogni membro della popolazione I entra in contatto con β individui al giorno; la frazione di suscettibili con cui viene in contatto è S/N e pertando una popolazione di I contagiati appiccica il virus a $\beta\, I\, S/N$ suscettibili al giorno. La popolazione dei suscettibili perde così alcuni elementi che si trasfriscono nei contagiati. A loro volta, i contagiati perdono elementi perchè guariscono o perchè muoiono. Indichiamo con $\gamma\, I$ la frazione che guarisce e con μI quella che muore. Otteniamo così il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dS}{dt} = -\beta\, \frac{I\, S}{N} \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta\, \frac{I\, S}{N} - \gamma\, I - \mu\, I \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\, I \tag{3}$$

$$\frac{dD}{dt} = \mu\, I \tag{4}$$

Ovviamente

$$\frac{d}{dt}\,(S + I + R + D) = \frac{dN}{dt} = 0.$$

2 Stima dei parametri

Il modello contiene 3 parametri, β, γ e μ che vanno in qualche modo stimati dai dati disponibili. La stima può essere fatta supponendo che, su un intervallo temporale prestabilto, i dati sperimentali seguano la soluzione delle equazioni. I dati delle quattro popolazioni sono disponibili sul sito del Ministero della Salute con **cadenza giornaliera** a partire dal 2/3/2020.

Guariti: $R = \{149, 160, 276, 414, 523, 589, 622, 724, 1004, 1045, 1258,$
$1439, 1966, 2335, 2749, 2941, 4025, 4440, 5129\}$

Contagiati: $I = \{2036, 2502, 3089, 3858, 4636, 5883, 7375, 9172, 10149, 12462,$
$15113, 17660, 21157, 24747, 27980, 31506, 35713, 41035, 47021\}$

Deceduti: $D = \{52, 79, 107, 148, 197, 233, 366, 463, 631, 827, 1016,$
$1266, 1441, 1809, 2158, 2503, 2978, 3405, 4032\}$

I suscettibili sono dati dalla popolazione meno la somma dei tre gruppi qui sopra. Per stimare i parametri, supponiamo che i dati siano consistenti con le equazioni nell'intervallo di giorni

$[n_1, n_2 = n1 + n]$. Prendiamo i dati di I, R e D tra n_1 ed n_2 e formiamo i vettori di $n+1$ elementi

$$\widetilde{I} = \{I_{n_1}, I_{n_1+1}, ..., I_{n_2}\} \tag{5}$$
$$\widetilde{R} = \{R_{n_1}, R_{n_1+1}, ..., R_{n_2}\} \tag{6}$$
$$\widetilde{D} = \{D_{n_1}, D_{n_1+1}, ..., D_{n_2}\} \tag{7}$$

Con questi, nell'ipotesi che i dati soddisfino le equazioni (1)-(4) nell'intervallo $[n_1, n_2]$ formiamo i nuovi vettori, Γ, M e B di lunghezza n con

$$\Gamma_i = \frac{\widetilde{R}_{i+1} - \widetilde{R}_i}{I_i} \tag{8}$$
$$M_i = \frac{\widetilde{D}_{i+1} - \widetilde{D}_i}{I_i} \tag{9}$$
$$B_i = N\,\frac{\widetilde{S}_{i+1} - \widetilde{S}_i}{I_i\,S_i} \tag{10}$$

per $i = 1, ..., n$. A questo punto le possibilità per stimare β, γ e μ sono molteplici; ho scelto la più semplice, quella della media (o valore di aspettazione):

$$\beta = -E[B] \tag{11}$$
$$\gamma = E[\Gamma] \tag{12}$$
$$\mu = E[M] \tag{13}$$

3 Le condizioni iniziali

Il sitema (1)-(4) ha bisogno delle condizioni iniziali sulle quattro componenti. Anche qui ci sono varie alternative, tra cui quella di prendere il primo dato ed imporlo a $t = 0$. Ho scelto una strada diversa, considerando una sola persona infetta all'istante $t = 0$, quindi:

$$I(0) = 1 \tag{14}$$
$$S(0) = N - 1 \tag{15}$$
$$R(0) = D(0) = 0. \tag{16}$$

Ovviamente, con questa scelta l'istante $t = 0$ non coincide con il giorno 2 marzo, cioè il giorno del primo dato disponibile. Per sovrapporre i dati sperimentali al grafico della soluzione bisogna shiftare i dati in avanti di un tempo T_S; l'aggiustamento di questo l'ho fatto ad occhio.

4 Risutati numerici

Ho scelto $n_1 = 1$ e $n_2 = 8$, scelta dettata dall'osservazione che i dati dei primi otto giorni sembrano seguire una curva senza salti. La popolazione quella dell'Italia, $N = 60$ milioni. Con questi valori ho $\gamma = 0.0258$, $\mu = 0.0154$ e $\beta = 0.275$ (quindi β non coincide con il fatidico R_0 come mi sarei aspettato). Per la scelta di T_S l'accordo "visivamente migliore" lo ottengo per $T_S = 30.2$ (vuol dire che il primo contagio è avvenuto ad inizio febbraio).

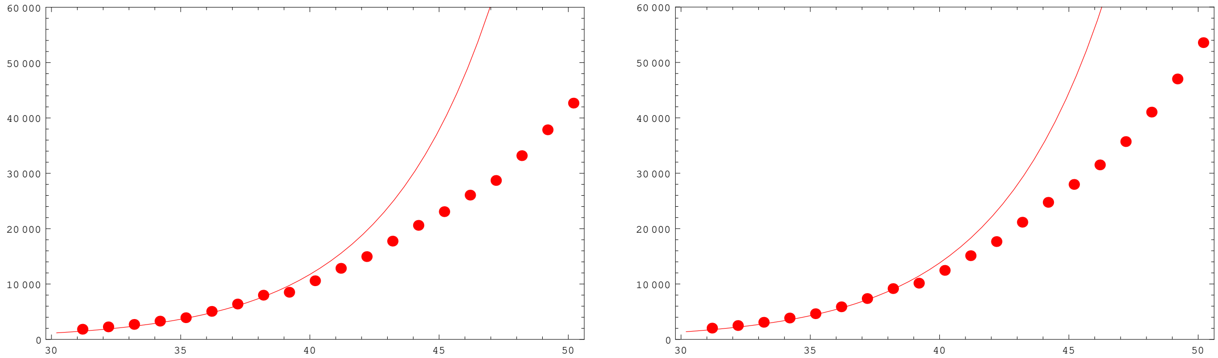

Figura 1: Casi attivi $I(t)$ (a sinistra) e casi contagiati totali (a destra) dal 2/3/2020 fino ad oggi. Pallini rossi: dati sperimentali, linea contiua: soluzione numerica

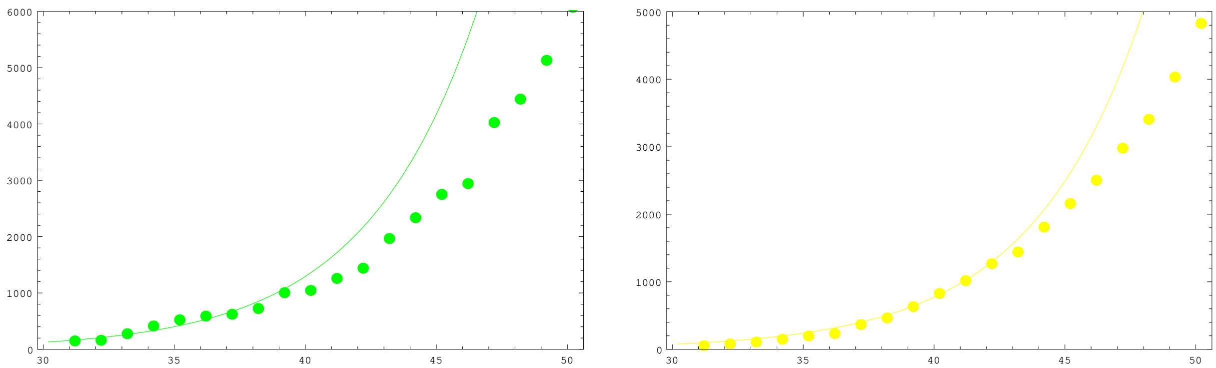

Figura 2: Guarigioni $I(t)$ (a sinistra) e decessi (a destra) dal 2/3/2020 fino ad oggi. Pallini verdi (gialli): dati sperimentali, linea contiua: soluzione numerica

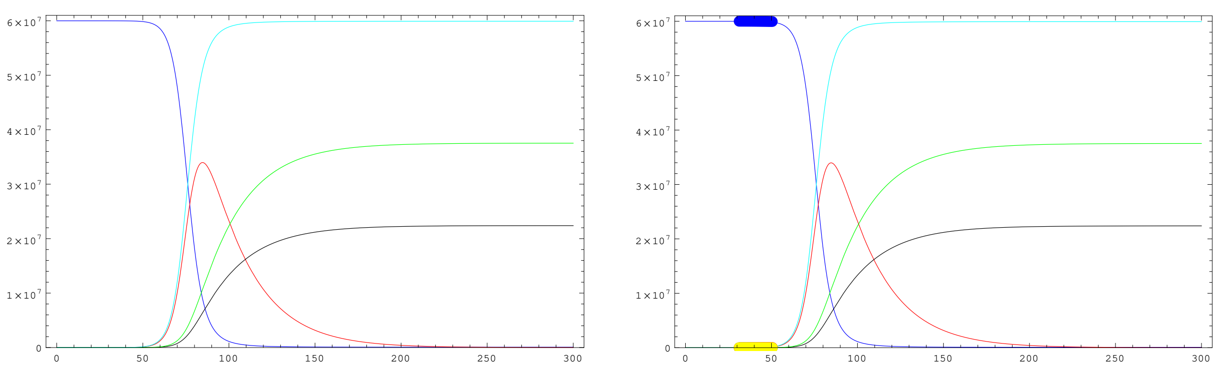

Figura 3: Soluzione numerica delle equazioni: popolazione contagiata attiva $I(t)$ (linea rossa), popolazione suscettibile $S(t)$ (linea blu), guarigioni $R(t)$ (linea verde) e decessi $D(t)$ (linea nera). La linea blu chiara rappresenta il nmero delle persone contagiate (quindi $N - S(t)$). A sinistra: soluzione numerica e basta; a destra: soluzione numerica con i dati sperimentali sovrapposti.

Nelle figure, in ascissa sono i giorni a partire dal giorno in cui c'è il primo contagiato, $t = 0$. In Fig 1 mostro la soluzione numerica per il numero di casi attivi (pannello di sinistra) $I(t)$ e per i casi totali $I(t) + R(t) + D(t)$ sovrapposta ai dati sperimentali, che si adattano bene con la soluzione numerica dei primi otto giorni (per la scelta fatta). Poi, il modello numerico prevede una crescita dell'epidemia molto più rapida dei dati. In Fig. 2 ci sono i guariti (a sinistra, in verde) ed i deceduti (a destra, in giallo). Nella Fig. 3 vediamo la soluzione numerica lungo tutto il periodo dell'epidemia, dalla sua insorgenza fino alla fine. Il picco dei casi attivi si manifesta per $t \approx 100$, il numero di contagiati è praticamente tutta la popolazione ed il numero di decsssi è enorme: circa 20 milioni.