Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2023/2024
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 luglio 2024

1. La popolazione di un dato territorio viene divisa in due fasce di reddito, reddito alto e reddito basso. Le famiglie a reddito basso costituiscono il 75 % della popolazione. Si sa che il 20 % delle famiglie a reddito basso vive in una casa di proprietà, mentre tale percentuale è del 90 % nella fascia di reddito alto, le rimanenti famiglie essendo in affitto. Se una famiglia scelta a caso vive in una casa di proprietà, qual è la probabilità che sia nella fascia a reddito alto?

2. Due variabili casuali X e Y hanno distribuzione congiunta uniforme nel dominio D costituito dal quarto di cerchio di centro l'origine e raggio 1 e giacente nel I quadrante. Determinare
   - *(i)* il valore della densità;
   - *(ii)* le densità marginali; X e Y sono indipendenti?
   - *(iii)* Media e varianza di X e Y;
   - *(iv)* il coefficiente di correlazione tra X e Y.

3. Si esegue un test per stabilire se, in una certa città, il tasso alcolico degli automobilisti sia inferiore al livello legale μ_0, che è di 0.5 grammi/litro. Vengono fermati 10 automobilisti, ottenendo i seguenti risultati:

   $$0.55,\ 0.53,\ 0.51,\ 0.55,\ 0.54,\ 0.4,\ 0.53,\ 0.50,\ 0.49,\ 0.58$$

   Sulla base di questo campione, con un test unilaterale, si può accettare, con un livello di significatività del 5%, l'ipotesi che il tasso alcolemico sia inferiore al livello legale? Si consideri l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = \mu_0$ e l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu < \mu_0$.

① $A =$ "Reddito alto"

$B =$ "Reddito basso"

$P =$ "Casa di proprietà"

$$P(A) = 0.25 \; ; \; P(B) = 0.75$$

$$P(P|B) = 0.2 \; ; \; P(P|A) = 0.9$$

Con Bayes:

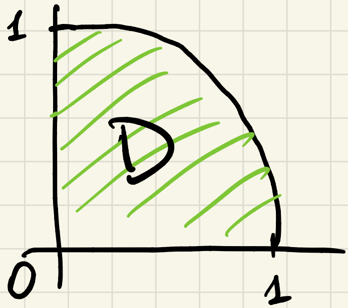
$$P(A|P) = P(P|A)\,\frac{P(A)}{P(P)}$$

$$P(P) = P(P|A)P(A) + P(P|B)P(B)$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \approx 0.375$$

$$P(A|P) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{3}{5} = 0.6$$

2



$f(x,y) = C$ in D

$= 0$ fuori

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = C \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = \frac{4}{\pi}$$

$$f_X(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi}\,dy = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}$$

$$f(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$$

$$E[X] = \iint_D x \, \frac{4}{\pi} \, dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dr\, r \int_0^{\pi/2} r \cos\varphi \, \frac{4}{\pi} \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \, \frac{4}{\pi} = \frac{4}{3\pi} = E[Y]$$

$$E[X] = \int_0^1 x \, \frac{4}{\pi} \sqrt{1-x^2} \, dx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(1-x^2\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3\pi}$$

$$E[Y] = E[X] = \frac{4}{3\pi}$$

$$E[X^2] = \iint_D x^2 \, \frac{4}{\pi} \, dx\,dy =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 dr \, r \int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\pi} \underbrace{\int_0^1 r^3 \, dr}_{1/4} \; \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi}_{\pi/4} = \frac{1}{4}$$

$$E[Y^2] = E[X^2] = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 64}{36\pi^2} \approx$$

$$\approx 0.07 \quad = \mathrm{Var}(Y)$$

$$E[XY] = \iint_D xy \, \frac{4}{\pi} \, dx\, dy =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 dr\, r \int_0^{\pi/2} r^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\pi} \, \frac{1}{4} \, \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \, \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\approx 0.16$$

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{9\pi - 32}{18\pi^2} \approx$$

$$\approx -0.021$$

$$\rho = \frac{9\pi - 32}{18\pi^2} \cdot \frac{36\pi^2}{9\pi^2 - 64} =$$

$$= \frac{2(9\pi - 32)}{9\pi^2 - 64} \approx -0.3$$

(3) $n = 10$

$t_\alpha(9) = 1.833$

$\overline{X}_n = 0.518 \qquad S_n^2 = 0.0024$

$\mu_0 = 0.5$

$H_0 : \mu \geq \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$

Regione critica: $\overline{X}_n < \mu_0 + \delta$

$$\delta = t_\alpha(9) \frac{S_n}{\sqrt{10}} = 1.833 \cdot \sqrt{\frac{0.0024}{10}}$$

≈ 0.0014

$\mu_0 + \delta \approx 0.5014$

H_0 rifiutata