Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 12 luglio 2023

1. Un dispositivo elettronico è alimentato da quattro batterie e funziona quando almeno due delle batterie non sono scariche. Se il tempo di vita di ciascuna batteria è governato da una legge esponenziale di vita media 10 ore, qual è la probabilità che il dispositivo funzioni per più di 11 ore?

La durata di ciascuna batteria è governata dalla legge esponenziale

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$$

$$= 0 \qquad t < 0$$

con $\lambda = \frac{1}{10}$ e t misurato in ore.

Siano X_1, X_2, X_3, X_4 la durata delle singole batterie e sia Y il numero di batterie funzionanti dopo 11 ore.

La domanda è:

$$P(Y \geq 2) = ?$$

Ora $Y \sim B(4, p)$ con $p = P(X_i > 11)$

$$p = 1 - P(X_i \leq 11) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 11}) = e^{-11/10}$$

e quindi

$$P(Y \geq 2) = P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) =$$

$$= \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + \binom{4}{3} p^3 (1-p) + \binom{4}{4} p^4 \simeq$$

$$\simeq 0.41$$

2. Un distributore di benzina ha due pompe. Il numero di clienti che ciascuna delle pompe riesce a smaltire è distribuito secondo una legge di Poisson di media 2 clienti ogni quarto d'ora. Se una delle pompe viene sostituita con una più veloce che smaltisce 3 clienti ogni quarto d'ora, qual è la probabilità che vengano smaltiti 5 clienti in un quarto d'ora, prima e dopo della sostituzione della pompa? Di quanto migliora la prestazione del distributore, considerando il rapporto fra le due probabilità?

X_A = numero clienti pompa A in 15'

X_B = numero clienti pompa B in 15'

X = numero clienti totali in 15'

<u>Prima della sostituzione</u>:

$X_A \sim Poi(\lambda = 2) \qquad X_B \sim Poi(\lambda = 2)$

$$P(X=5) = \sum_{k=0}^{5} P(X_A = k)\, P(X_B = 5-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{5} e^{-2} \frac{2^k}{k!} e^{-2} \frac{2^{5-k}}{(5-k)!} =$$

$$= e^{-4} \sum_{k=0}^{5} \frac{2^k \cdot 2^{5-k}}{k!\,(5-k)!} =$$

$$= e^{-4} \frac{1}{5!} \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^k \, 2^{5-k} =$$

$$= \frac{e^{-4} 4^5}{5!} \approx 0.156$$

Dopo la sostituzione :

$X_A \sim Poi(\lambda = 2)$ $\qquad$ $X_B \sim Poi(\lambda = 3)$

$$P(X=5) = \sum_{k=0}^{5} P(X_A = k) P(X_B = 5-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{5} e^{-2} \frac{2^k}{k!} e^{-3} \frac{3^{5-k}}{(5-k)!} =$$

$$= e^{-5} \frac{1}{5!} \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^{k} 3^{5-k} =$$

$$= e^{-5} \frac{5^5}{5!} \approx 0.175$$

$$\text{Rapport} = \frac{e^{-5}\, 5^5}{5!} \frac{5!}{e^{-4}\, 4^5} = e^{-1} \left(\frac{5}{4}\right)^5 \approx 1.12$$

3. Per stimare la media di una popolazione vengono presi in considerazione due stimatori: la media campionaria

$$\hat{\theta}_1 = \overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

e lo stimatore

$$\hat{\theta}_2 = \overline{Y}_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{n}, \qquad \text{con} \qquad Y_k = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_k}{k}$$

Verificare che sono entrambi stimatori corretti e che lo stimatore $\hat{\theta}_2$ non è meno efficace di $\hat{\theta}_1$.

Notiamo innanzitutto che:

$$E[Y_k] = \frac{1}{k} k \cdot \mu = \mu$$

$$E[\bar{Y}_n] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

Quindi $\bar{Y}_n$ è corretto. Per $\bar{X}_n$ lo sapevamo già.

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (\text{risultato noto})$$

$$Var(Y_k) = Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{k}\right) = \frac{1}{k^2} k\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{k}$$

$$Var(\bar{Y}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} Var(Y_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma^2}{k} =$$

$$= \left(\frac{\sigma^2}{n}\right) \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \leq \left(\frac{\sigma^2}{n}\right) \frac{1}{n}\, n \cdot 1 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{Var}(\bar{Y}_n)}{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)} \leq 1$$

3

$$Y_k = \frac{X_1 + \dots + X_k}{2}$$

$$E[Y_k] =$$

$$\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}$$

$$E[\bar{Y}_n] = \frac{1}{n}\{E[Y_1] + E[Y_2] + \dots + E[Y_n]\} =$$

$$= \mu$$

$$Var(\bar{Y}_n) = \; ?$$

$$Y_{k+1} = \frac{X_1 + \dots + X_{k+1}}{k+1} = \frac{X_1 + \dots + X_k}{k}\frac{k}{k+1} + \frac{X_{k+1}}{k+1}$$

$$= \frac{k}{k+1} Y_k + \frac{X_{k+1}}{k+1} =$$

$$= \frac{kY_k + X_{k+1}}{k+1}$$

$$\mathrm{Var}(Y_k) = \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{k^2} k\sigma = \frac{\sigma}{k}$$

$$\mathrm{Var}(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma}{k} = \frac{\sigma}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{\sigma}{n} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\sigma}{n} \frac{1}{n} n \cdot 1$$