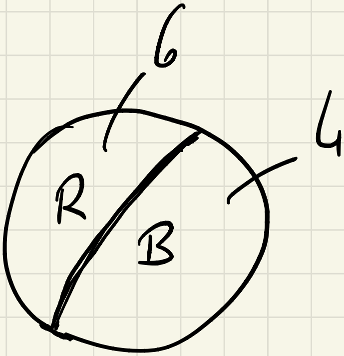
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 9 settembre 2023

1. Si estraggono (contemporaneamente) due palline da un'urna che ne contiene 6 rosse e 4 blu. Sia X il numero di palline rosse estratte e Y il numero di palline blu. Calcolare media e varianza di X e Y, la loro covarianza e il loro coefficiente di correlazione. Inoltre, dire se X e Y sono indipendenti.

1



$$\# S = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$$

2 estratte

$X = \#$ palline R $\qquad Y = \#$ palline B

$X \in \{0,1,2\} \qquad Y \in \{0,1,2\}$

$$(X,Y) \in \{(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(1,1),(2,1),(0,2),(1,2),(2,2)\}$$

Ovviamente $P(X=i,\ Y=j)=0$ se $i+j \neq 2$

$$P(X=1,\ Y=1) = \frac{\# A}{\# S} = \frac{6 \times 4}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=0, Y=2) = \frac{\binom{4}{2}}{45} = \dots = \frac{2}{15}$$

$$P(X=2, Y=0) = \frac{\binom{6}{2}}{45} = \dots = \frac{1}{3}$$

Verifica: $\frac{8}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = 1$ ✓

Densità congiunta:

X \ Y	0	1	2	Marg. X
0	0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
1	0	$\frac{8}{15}$	0	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
Marg. Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

$$E[X] = 0 \cdot \frac{2}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15} + \frac{2}{3} = \frac{6}{5}$$

$$E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} = \frac{4}{5}$$

$$E[X^2] = 0 \cdot \frac{2}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{28}{15}$$

$$E[Y^2] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{16}{15}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{28}{15} - \frac{36}{25} = \frac{132}{75}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{16}{15} - \frac{16}{25} = \frac{32}{75}$$

$$E[XY] = 1 \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{8}{15} - \frac{24}{25} = -\frac{32}{75}$$

$$\rho = -\frac{32/75}{\sqrt{(44/25)(32/75)}} = -\frac{5}{2\sqrt{11}}$$

$$\approx -0.754$$

2. Una batteria ha una vita media $\theta = 1/\lambda$, ma viene sostituita prima che si scarichi completamente, dopo un tempo T. La legge che governa il tempo di vita della batteria è dunque una legge esponenziale di parametro λ per $0 \leq t \leq T$, ed è nulla altrimenti. Si chiede di:

   (i) scrivere esplicitamente la distribuzione del tempo di vita della batteria e calcolarne il valor medio;

   (ii) misurando t in ore, con $\theta = 10$ e $T = 9$, calcolare la probabilità che la batteria duri più di 8 ore;

   (iii) confrontare il valore del punto precedente con l'analogo valore ottenuto assumendo per il tempo di vita una distribuzione uniforme per $0 \leq t \leq T$.

2

$$f(t) = \begin{cases} A\lambda e^{-\lambda t} & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Normalizzazione: $\int_0^{\infty} f(t)\,dt = \int_0^{T} A\lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{1-e^{-\lambda T}}$$

$$E[X] = \int_0^{T} t\,\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda T}}\,dt = \dots$$

$$= \frac{1-e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T}}{\lambda\left(1-e^{-\lambda T}\right)}$$

Ora, con $\lambda = \frac{1}{10}$ e $T=9$:

$$P(x>8) = \int_8^9 A\lambda e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-9/10}} \frac{1}{10} \int_8^9 e^{-t/10} dt =$$

$$= \frac{e^{-8/10} - e^{-9/10}}{1-e^{-9/10}} \approx 0.072$$

Con l'uniforme:

$$f(t) = \frac{1}{T} \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (T=9)$$

$$P(x>8) = \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9} = 0.\bar{1} > 0.072$$

3. Una fabbrica di birra vende i suoi prodotti in bottiglie da 33 cl. Viene eseguito un test d'ipotesi sul contenuto delle bottiglie con un campione di rango 5, che fornisce:

$$32 \quad 32.5 \quad 33.1 \quad 32.7 \quad 32.5$$

Verificare se l'affermazione sui 33 cl. del contenuto è supportata dai dati oppure no, al 90%, al 95% e al 99%.

③

$$X = \{32, 32.5, 33.1, 32.7, 32.5\}$$

$$\bar{X} = 32.56 \qquad S^2 = 0.158$$

$$t = \frac{\bar{X} - 33}{\sqrt{0.158/5}} \approx -2.475$$

Al 90% $\quad t_{0.05}(4) = 2.132$

Al 95% $\quad t_{0.025}(4) = 2.776$

Al 99% $\quad t_{0.005}(4) = 4.604$

Quindi H_0 accettata al 95% e 99%

rifiutata al 90%.