Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale
Sede di Fermo
Anno Accademico 2011/2012
Probabilità e Statistica

Nome

N. Matricola . ..... Fermo, 24 febbraio 2012

1. Da un'urna contenente N palline, di cui n_B bianche, n_R rosse e le rimanenti gialle, vengono estratte a caso 4 palline con reimbussolamento.

   (i) Supponendo che il numero di palline sia uniformemente distribuito fra i colori, quale delle sequenze

   $$RRRB \quad RGRG \quad GGBB \quad GGGG \quad BBBR$$

   è più probabile?

   (ii) Supponendo ora che $n_B = N/2$ e che ci siano tre volte più palline rosse che gialle, qualè la sequenza più probabile?

2. Due variabili casuali discrete X e Y possono assumere i valori 3, 0 e -1 con probabilità

   $$P(\{X = 3\}) = p, \qquad P(\{X = 0\}) = 1/3$$
   $$P(\{Y = 3\}) = 1/4, \qquad P(\{Y = 0\}) = 1/4.$$

   Si supponga inoltre una densità congiunta uniforme.

   (i) Calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$ e $Var(Y)$ in funzione di p;

   (ii) Calcolare il coefficiente di correlazione in funzione di p;

   (iii) dire se esiste un valore di p per il quale le variabili sono indipendenti e, se esiste, calcolarlo.

3. Siano X e Y due variabili aleatorie continue indipendenti con X uniforme su $[0, 1]$ ed Y esponenziale di parametro $\lambda = 3$. Calcolare $P(\{X \leq Y\})$.

4. Una fabbrica produce componenti elettronici; mediamente, una frazione $p = 1/50$ dei prodotti sono difettosi. Su un campione di 100 componenti,

   (i) qualè la probabilità che siano tutti funzionanti?

   (ii) Qualè la probabilità esatta che ve ne siano più di 2 difettosi?

   (iii) Qualè il valore per tale probabilità fornito dalla legge di Poisson?

   (iv) Qualè il valore per tale probabilità fornito dalla legge normale?

(1) (i) Le sequenze sono equiprobabili, con $p = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

(ii) $\begin{cases} n_B + n_R + n_G = N \\ n_B = N/2 \\ n_R = 3 n_G \end{cases}$ $\quad \frac{N}{2} + 4 n_G = N \rightarrow \boxed{n_G = \frac{N}{8}}$

$\boxed{n_R = \frac{3}{8} N} \quad \boxed{n_B = \frac{N}{2}}$

Quindi $p_G = \frac{1}{8} \quad p_R = \frac{3}{8} \quad p_B = \frac{1}{2}$

$P(\{RRRB\}) = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \frac{1}{2} = 0.026$

$P(\{RGRG\}) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0.022$

$P(\{GGBB\}) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}04$

$P(\{GGGG\}) = \left(\frac{1}{8}\right)^4 = 0.00024$

$P(\{BBBR\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{3}{8} = 0.047$ è la più probabile

(2) $X \rightarrow \{3, 0, -1\} \quad p_3 = p \quad p_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow p_{-1} = 1 - \left(p + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - p$

$Y \rightarrow \{3, 0, -1\} \quad p_3 = \frac{1}{4} \quad p_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow p_{-1} = \frac{1}{2}$

(i) $E[X] = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = 3p - \frac{2}{3} + p = 4p - \frac{2}{3}$

$E[Y] = \sum_{i=1}^{3} p_i y_i = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$E[X^2] = \sum_i p_i x_i^2 = 9p + \frac{2}{3} - p = 8p + \frac{2}{3}$

$E[Y^2] = \sum_i p_i y_i^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$

$Var(X) = 8p + \frac{2}{3} - \left(4p - \frac{2}{3}\right)^2 = -16p^2 + \frac{16}{3}p + 8p + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = -16p^2 + \frac{40}{3}p + \frac{2}{9}$

$Var(Y) = \frac{11}{4} - \frac{1}{16} = \frac{43}{16}$

5. Si fa una rilevazione statistica sul numero di telefonate al minuto che arrivano ad un centralino. Un campione di 60 telefonate fornisce la seguente tabella:

telefonate/min.	frequenza oss.
0	2
1	3
2	7
3	9
4	11
5	10
6	8
7	4
8	3
9	2
10	1
> 10	0

Utilizzando il test del χ^2, possiamo affermare, con un livello di confidenza del 5% che il numero di telefonate al minuto che arrivano segua una legge normale? (*)

(*) Per gli studenti dell'AA 2010/2011: Determinare l'intervallo di confidenza al 95% per la media delle telefonate al minuto.

---

2 cont. (ii) $(X,Y) \to \{\ldots\}$ 9 valori possibili (x_i, y_j)

quindi $P(\{X=x_i, Y=y_j\}) = p_{ij} = \frac{1}{9}$

$P_X(x_i) = \sum_j p_{ij} = \frac{1}{9}\cdot 3 = \frac{1}{3}$ e $P_Y(y_j) = \frac{1}{3}$

$E[X] = \sum_i P_X(x_i)\, x_i = \frac{1}{3}(3+0-1) = \frac{2}{3}$ $\qquad E[Y] = \frac{2}{3}$

$E[XY] = \sum_{ij} p_{ij}\, x_i y_j = \frac{1}{9}\left[3(3+0-1) + 0\cdot(3+0-1) + (-1)(3+0-1)\right] = \frac{1}{9}[4] = \frac{4}{9}$

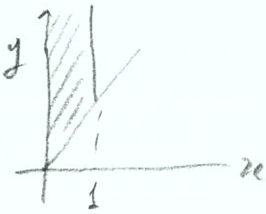
$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$ $\qquad \rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = 0$

(iii) Le variabili sono indipendenti

---

3) $f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad (\lambda = 3)$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$



$P(\{X \le Y\}) = \iint_{x \le y} dx\,dy\; 3e^{-3y} = \int_0^1 dx \int_x^\infty dy\; 3e^{-3y} =$

$= \int_0^1 dx \left[-e^{-3y}\right]_x^\infty = \int_0^1 dx\, e^{-3x} = \frac{e^{-3x}}{-3}\Big|_0^1 = \frac{1-e^{-3}}{3}$

④ (i) p_D = prob. che un pezzo sia difettoso

p_F = " funzionante $= 1 - p_D$

$$P(\text{tutti funz.}) = (1-p_D)^{100} = \left(\frac{49}{50}\right)^{100} = 0.1326$$

(ii) X = numero di pezzi difettosi

$$X \sim B\left(100, \frac{1}{50}\right) \; ; \; P(\{X>2\}) = 1 - P(\{X \le 2\}) =$$

$$= 1 - \{P(\{X=0\}) + P(\{X=1\}) + P(\{X=2\})\} =$$

$$= 1 - \binom{100}{0}\left(\frac{1}{50}\right)^0\left(\frac{49}{50}\right)^{100} - \binom{100}{1}\left(\frac{1}{50}\right)\left(\frac{49}{50}\right)^{99} - \binom{100}{2}\left(\frac{1}{50}\right)^2\left(\frac{49}{50}\right)^{98} =$$

$$= 1 - 0{,}1326 - 100 \cdot \frac{1}{50} \cdot 0{,}1353 - \underbrace{\frac{100!}{2!\,98!}}_{= 50 \times 99} 0.00005524 = 0.3234$$

(iii) $\lambda = np = 2$ Poisson: $f(k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $(\lambda = 2)$

$$P(\{X>2\}) = 1 - P(\{X \le 2\}) = 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) = 1 - e^{-2} \cdot 5 = 1 - 5e^{-2}$$
$$= 0.3233$$

(iv) $E[X] = np = 2$ $\quad Var(X) = np(1-p) = 2 \times \dfrac{49}{50} = \dfrac{49}{25}$

Variabile standardizzata $\quad Z = \dfrac{X-2}{\sqrt{\frac{49}{50}}} = \dfrac{X-2}{0{,}9899}$

$$P(\{X>2.5\}) = 1 - P(\{X<2.5\}) = 1 - P(\{Z < 0.505\}) = 1 - \Phi(0.505) =$$

$$= 1 - 0{,}69 = 0.31$$

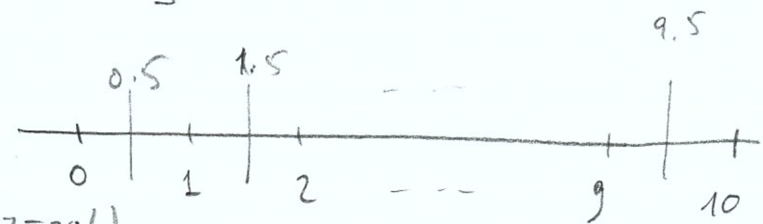
⑤ $\mu = 0\cdot\frac{2}{60} + 1\cdot\frac{3}{60} + 2\cdot\frac{7}{60} + \cdots + 9\cdot\frac{2}{60} + 10\cdot\frac{1}{60} = 4.43$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_i f_i x_i^2 - n\mu^2\right] = 5.03 \qquad \text{con } n = 60$$

$$s = \sqrt{s^2} = 2.24$$

$$X \sim N(\mu, s^2) \qquad Z = \frac{X-\mu}{s} \sim N(0,1)$$

Frequenze attese :



$P(\{X < 0.5\}) = P(\{Z < -1.7539\})$

$P(\{0.5 < X < 1.5\}) = P(\{-1.75 < Z < -1.31\}) = \underbrace{\Phi(-1.31) - \Phi(-1.75)}_{\text{da moltiplicare per } n}$

etc.

X	freq. Oss.	freq. attese	
$x < 0.5$	2	2.38	ACC.
$0.5 < x < 1.5$	3	3.34	
$1.5 < x < 2.5$	7	5.93	
$2.5 < x < 3.5$	9	8.66	
$3.5 < x < 4.5$	11	10.4	
$4.5 < x < 5.5$	10	10.26	
$5.5 < x < 6.5$	8	8.33	
$6.5 < x < 7.5$	4	5.56	ACC.
$7.5 < x < 8.5$	3	3.05	
$8.5 < x < 9.5$	2	1.38	
$x > 9.5$	1	0.72	

$x < 2.5$	12	11.65
$2.5 < x < 3.5$	9	8.66
$3.5 < x < 4.5$	11	10.40
$4.5 < x < 5.5$	10	10.26
$5.5 < x < 6.5$	8	8.33
$x > 6.5$	10	10.71

$$\chi^2 = \frac{(12 - 11.65)^2}{11.65} + \cdots = 0.125$$

$$\nu = k - 1 - m = 6 - 1 - 2 = 3 \qquad \chi^2_{0.05} = 7.815$$

Possiamo affermare che i dati seguono una legge normale.