Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale
Sede di Fermo
Anno Accademico 2010/2011
Probabilità e Statistica

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 25 gennaio 2011

1. Una ditta produce circuiti elettrici utilizzando due diverse macchine, M_1 ed M_2, che producono pezzi difettosi con probabilità $p_1 = 0.01$ e $p_2 = 0.05$. La macchina M_1, inoltre, è responsabile per il 70% della produzione totale.

   (i) Qual'è la probabilità che un pezzo prodotto dalla fabbrica sia difettoso?

   (ii) Qual'è la probabilità che un pezzo difettoso sia prodotto dalla macchina M_2?

2. Una variabile aleatoria X ha densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} 10\,e^{-10x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

   Calcolarne la media μ e la varianza σ^2. Calcolare quindi la probabiltà $P(|X - \mu| \geq 1)$ e confrontarla con la stima fornita dalla disuguaglianza di Chebyshev.

3. La polizia stradale misura la velocità delle automobili che transitano in un determinato punto della strada, dove il limite di velocità è di 50 km/h. Un gruppo di venti misurazioni fornisce i seguenti risultati:

   48.25, 49.81, 49.11, 44.01, 49.13, 45.61, 48.91, 49.19, 50.08, 44.33,
   46.32, 47.54, 45.10, 48.38, 50.40, 50.74, 45.07, 48.88, 44.78, 48.53

   Determinare gli intervalli di confidenza al 95% ed al 99% per la velocità media.

4. Con riferimento ai dati del problema precedente, qualè la probabilità che, su 100 automobili che transitano, 16 superino il limite di velocità? Si confronti il risultato esatto con l'approssimazione (distribuzione) di Poisson. *(Suggerimento: si identifichi la probabilità che una macchina superi il limite di velocità con la proporzione corrispondente nella tabella precedente; quindi, trattare il fenomeno con lo schema successo-insuccesso)*

1. D = pezzo difettoso

$M_{1,2}$ " prodotto da $M_{1,2}$

$$P(D|M_1) = 0.01 \qquad P(D|M_2) = 0.05$$

(i) $P(D) = P(D \cap \Omega) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2)$

Ma $P(D|M_1) = \dfrac{P(D \cap M_1)}{P(M_1)}$, $P(D \cap M_2) = \dfrac{P(D \cap M_2)}{P(M_2)}$

$$P(D) = 0.01 \times 0.7 + 0.05 \times 0.3 = 0.07 + 0.15 = 0.22$$

(ii) $P(M_2|D) = \dfrac{P(D|M_2)\,P(M_2)}{P(D)} = \dfrac{0.05 \times 0.3}{0.22} = \dfrac{0.15}{0.22} = 0.68$

2. $$\int_0^\infty 10 e^{-10x}\,dx = 10 \left.\frac{e^{-10x}}{-10}\right|_0^\infty = 1$$

$$\mu = \int_0^\infty 10 x e^{-10x}\,dx = \cancel{10x \left.\frac{e^{-10x}}{-10}\right|_0^\infty} - 10 \int_0^\infty \frac{e^{-10x}}{-10}\,dx =$$

$$= \left.\frac{e^{-10x}}{-10}\right|_0^\infty = \frac{1}{10}$$

$$\sigma^2 = \langle (X-\mu)^2 \rangle = \langle X^2 - 2\mu X + \mu^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \mu^2$$

$$\langle X^2 \rangle = \int_0^\infty x^2\, 10 e^{-10x}\,dx = \cancel{10 x^2 \left.\frac{e^{-10x}}{-10}\right|_0^\infty} + 10 \int_0^\infty 2x \frac{e^{-10x}}{10}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\mu \qquad \sigma^2 = \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100}$$

$$P\{|X-\mu| \geq 1\} = P\{X \leq \mu - 1\} + P\{X \geq \mu + 1\} = 0 + \int_{1.1}^\infty 10 e^{-10x}\,dx =$$

$$= -e^{-10x}\Big|_{1.1}^\infty = e^{-11} = 0.0000167$$

$$P\{|X-\mu| > \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1/100}{1} = \frac{1}{100}$$

③ $\bar{X} = 47.7$ $\quad T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{20} (v_i - \bar{x})^2 \frac{1}{19} = 4.77 \qquad S = 2.18$$

$$I_{1-\alpha} = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$\alpha = 0.05 \quad t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025}(19) = 2.093$

$\alpha = 0.01 \quad t_{0.005} = 2.861$

$$I_{95\%} = [46.70, 48.73] \qquad I_{99\%} = [46.31, 49.11]$$

④ $p = \frac{3}{20}$ $\quad n = 100$ $\quad B(100, p)(16)$

$$B(16) = \binom{100}{16} \left(\frac{3}{20}\right)^{16} \left(\frac{17}{20}\right)^{84} =$$

$$= \frac{100!}{16!\,84!} \left(\frac{3}{20}\right)^{16} \left(\frac{17}{20}\right)^{84} \approx 0.104$$

Con Poisson: $\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ $\qquad \lambda = np = 100 \cdot \frac{3}{20} = 15$

$\downarrow$

$$e^{-15} \frac{15^{16}}{16!} \approx 0.096$$