Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2023/2024
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 18 aprile 2024

1. La probabilità che il treno delle 9.25 che collega Ancona con Milano arrivi in ritardo per cause dovute al traffico o alla linea è di 0.5, mentre la probabilità che arrivi in ritardo per un guasto al locomotore è di 0.1. Supponendo che le due cause siano indipendenti, si chiede di determinare:
   - la probabilità p che il treno arrivi in ritardo;
   - la probabilità che il treno arrivi in ritardo per 3 giorni alla settimana, anche non consecutivi;
   - la probabilità che il treno arrivi in ritardo per 5 giorni consecutivi in una data settimana;
   - indicata con X la variabile che indica il numero di giorni in cui il treno ritarda in un mese, si determinino media e varianza di X in modo esatto e usando la legge di Poisson.

2. Il tempo di vita di un farmaco nel sangue segue una legge esponenziale. Se l'emivita del farmaco è di 3 settimane, quanto valgono media e varianza della distribuzione?
   (L'emivita è l'intervallo di tempo nel quale la concentrazione si riduce alla metà del valore iniziale.)

3. Due variabili casuali X ed Y hanno densità congiunta uniforme sul dominio

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^4\}$$

   . Determinare
   - il valore della densità;
   - le densità marginali; X e Y sono indipendenti?
   - media, varianza e coefficiente di correlazione di X e Y.

4. Si consideri lo stimatore per la media di una popolazione,

   $$\hat{\Theta} = \frac{X_1 + \lambda X_2 + \lambda^2 X_3}{3}$$

   definito su un campione di rango 3 e dipendente dal parametro reale λ.
   - Per quali valori di λ lo stimatore è corretto?
   - Fra gli stimatori forniti dalla risposta precedente, qual è quello più efficace?

1

$A =$ "Ritardo per linee"

$B =$ "Ritardo per guasto"

$P(A) = 0.5 \qquad P(B) = 0.1$

$p = P(A \cup B) = 0.6$

$Y =$ # giorni ritardo in 1 settimana

$Y \sim B(7, p)$

$$P(Y=3) = \binom{7}{3} p^3 (1-p)^4 =$$

$$= \frac{7!}{4!\,3!} (0.6)^3 (0,4)^4 =$$

$$= 35 \times (0.6)^3 (0,4)^4 \simeq 0.19$$

Probabilità ritardo 5 gg consecutivi

$$p^5 = (0.6)^5 = 0.078$$

$X = \#$ gg ritardo in un mese

$X \sim B(30, p)$

$E[X] = np = 30 \times 0.6 = 18$

$Var(X) = np(1-p) = 30 \times 0.6 \times 0.4 =$

$= 7{,}2$

Con Poisson: $\lambda = np = 18$

$E[X] = 18$

$Var(X) = \lambda = 18 \neq 7{,}2$

2

$$X \sim \lambda e^{-\lambda t} = f(t) \qquad \lambda = ?$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^3 f(t)\,dt = F(3) - F(0)$$

$$\frac{1}{2} = \left[1 - e^{-\lambda t}\right]_0^3 = 1 - e^{-3\lambda}$$

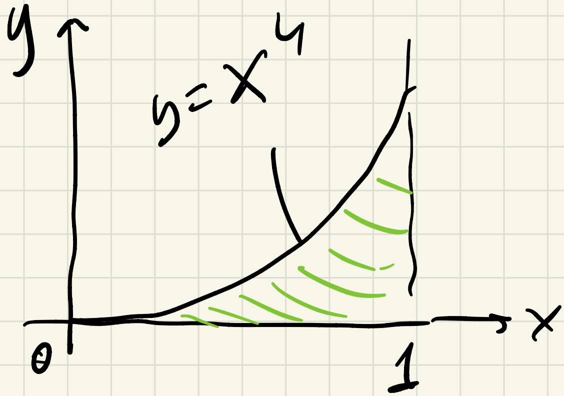
$$e^{-3\lambda} = \frac{1}{2} \qquad e^{3\lambda} = 2$$

$$3\lambda = \ln 2 \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{3}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{\ln 2} \approx 4.33$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{3}{\ln 2}\right)^2 \approx 18{,}73$$

③



$f(x,y) = C \qquad (x,y) \in D$

$= 0 \qquad$ altrimenti

$C = \dfrac{1}{\|D\|} \qquad \|D\| = \iint_D dx\,dy =$

$= \int_0^1 dx \int_0^{x^4} dy =$

$$= \int_0^1 dx\, x^4 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad C = 5$$

Marginali:

$$f_X(x) = \int_0^{x^4} dy\, 5 = 5x^4$$

$$0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_{\sqrt[4]{y}}^1 dx\, 5 = 5\left(1 - \sqrt[4]{y}\right)$$

$$0 \le y \le 1$$

$$f_X f_Y \neq f_{XY}$$ NON INDIP.

$$E[X] = \int_0^1 5x^5 \, dx = \frac{5}{6}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 5x^6 \, dx = \frac{5}{7}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{5}{7} - \frac{25}{36} = \frac{5}{252}$$

$$E[Y] = \int_0^1 5y(1 - \sqrt[4]{y}) \, dy =$$

$$= 5\int_0^1 (y - y^{5/4}) \, dy =$$

$$= 5\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{5}{18}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 5y^2(1 - \sqrt[4]{y}) \, dy =$$

$$= 5 \int_0^1 \left(y^2 - y^{9/4} \right) dy =$$

$$= 5 \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{13} \right) = \frac{5}{39}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{5}{39} - \left(\frac{5}{18} \right)^2 = \frac{215}{4212}$$

$$E[XY] = 5 \int_0^1 dx \int_0^{x^4} dy \, xy =$$

$$= 5 \int_0^1 dx \, x \int_0^{x^4} y \, dy =$$

$$= 5 \int_0^1 dx \, x \, \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^4} =$$

$$= 5\int_0^1 dx\, x\, \frac{x^8}{2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{18} = \frac{2}{108} = \frac{1}{54}$$

$$\rho = \frac{1/54}{\sqrt{(5/252)(215/4212)}}$$

$$\approx 0.58$$

4

$$E[\hat{\theta}] = \frac{1+\lambda+\lambda^2}{3}\mu$$

$$\hat{\theta} = \frac{X_1+\lambda X_2+\lambda^2 X_3}{3}$$

$$\downarrow$$

$$E[\hat{\theta}] = E\left[\qquad\qquad\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\underbrace{E[X_1]}_{\mu}+\lambda\underbrace{E[X_2]}_{\mu}+\lambda^2\underbrace{E[X_3]}_{\mu}\right\}$$

4

$$E[\hat{\theta}] = \frac{1+\lambda+\lambda^2}{3}\,\mu$$

$\hat{\theta}$ corretto se $1+\lambda+\lambda^2 = 3$

Cioè: $\lambda^2+\lambda-2=0$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 - 2X_2 + 4X_3}{3}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{9}\left\{\sigma^2 + 4\sigma^2 + 16\sigma^2\right\} =$$

$$= \frac{21}{9}\sigma^2 = \frac{7}{3}\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\vartheta}_2) = \frac{1}{9}\cdot 3\sigma^2 = \frac{1}{3}\sigma^2$$

$\hat{\vartheta}_2$ è più efficace

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2023/2024
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 18 aprile 2024

1. Mario scommette ogni giorno nelle corse di cavalli. Ad ogni scommessa egli punta su due cavalli, uno con probabilità 0.2 di vincere ed uno con probabilità 0.4. Si chiede di determinare:
   - la probabilità p che Mario vinca una singola scommessa;
   - la probabilità che Mario vinca per 2 giorni alla settimana, anche non consecutivi;
   - la probabilità che Mario vinca per 4 giorni consecutivi in una data settimana;
   - indicata con X la variabile che indica il numero di giorni in un mese in cui Mario vince, si determinino media e varianza di X in modo esatto e usando la legge di Poisson.

2. Il tempo di vita di una lampada segue una legge esponenziale. Se dopo 6 mesi metà delle lampade ha smesso di funzionare, quanto valgono media e varianza della distribuzione?

3. Due variabili casuali X ed Y hanno densità congiunta uniforme sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

   . Determinare
   - il valore della densità;
   - le densità marginali; X e Y sono indipendenti?
   - media, varianza e coefficiente di correlazione di X e Y.

4. Si consideri lo stimatore per la media di una popolazione,

$$\hat{\Theta} = \frac{X_1 + \lambda X_2 + \lambda^2 X_3}{3\,\lambda^2}$$

   definito su un campione di rango 3 e dipendente dal parametro reale λ.
   - Per quali valori di λ lo stimatore è corretto?
   - Fra gli stimatori forniti dalla risposta precedente, qual è quello più efficace?

(1)

$P(\text{"Cavallo A"}) = 0.2$

$P(\text{"Cavallo B"}) = 0.4$

$p = P(A \cup B) = 0.6$

$Y =$ # vincite / settimana

$Y \sim B(7, p)$

$$P(Y=2) = \binom{7}{2} p^2 (1-p)^5 =$$

$$= \frac{7 \cdot 6}{2} (0.6)^2 (0.4)^5 =$$

$$= 21\,(0.6)^2(0.4)^5 \approx 0.077$$

Prob. vincere per 4 giorni consecutivi $\quad p^4 = (0.6)^4 \approx 0.13$

$$X \sim B(30, 0.6)$$

$$E[X] = np = 30 \times 0.6 = 18$$

$$Var(X) = np(1-p) = 7.2$$

Con Poisson: $\quad \lambda = np = 18$

$$E[X] = 18$$

$$Var(X) = \lambda = 18 \neq 7.2$$

$\textcircled{2}$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \lambda = ?$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^6 \lambda e^{-\lambda t} dt = F(6) - F(0) =$$

$$= \left[1 - e^{-\lambda t}\right]_0^6 = 1 - e^{-6\lambda}$$

$$e^{-6\lambda} = \frac{1}{2} \qquad 6\lambda = \ln 2$$

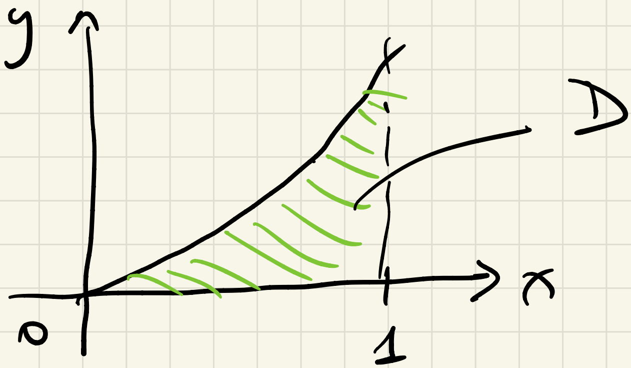
$$\lambda = \frac{\ln 2}{6}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{6}{\ln 2} \simeq 8.66$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \simeq 74.93$$

③

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$$



$$f(x,y) = C \quad \text{in } D$$

$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$C = \frac{1}{\|D\|} \qquad \|D\| = \iint_D dx\,dy = \frac{1}{3}$$

$$C = 3$$

Marginali:

$$f_X(x) = \int_0^{x^2} dy\, 3 = 3x^2$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}}^{1} dx\, 3 = 3\left(1 - \sqrt{y}\right)$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$f_X f_Y \neq f_{XY}$ NON INDIPENDENTI

$$E[X] = \int_0^1 x\,(3x^2)\,dx = \frac{3}{4}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(3x^2)\,dx = \frac{3}{5}$$

$$Var(X) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y\left[3(1-\sqrt{y})\right]dy =$$

$$= 3\int_0^1 (y - y^{3/2})\,dy =$$

$$= 3\left[\frac{y^2}{2} - \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^1 =$$

$$= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2\left[3(1-\sqrt{y})\right] dy =$$

$$= 3\int_0^1 \left(y^2 - y^{5/2}\right) dy =$$

$$= 3\left[\frac{y^3}{3} - \frac{2}{7}y^{7/2}\right]_0^1 =$$

$$= 3\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\right) = \frac{1}{7}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{7} - \frac{9}{100} = \frac{37}{700}$$

$$E[XY] = \iint_D xy \cdot 3 \, dx \, dy =$$

$$= 3 \int_0^1 dx \, x \int_0^{x^2} dy \, y =$$

$$= 3 \int_0^1 dx \, x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} =$$

$$= 3 \int_0^1 dx \, x \, \frac{x^4}{2} = \frac{3}{2} \, \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{40}$$

$$\rho = \frac{1/40}{\sqrt{(3/80)(37/700)}} =$$

$$= \frac{1}{40} \frac{\sqrt{700 \cdot 80}}{\sqrt{37 \cdot 3}} =$$

$$= \frac{1}{40} \frac{10 \cdot 4 \cdot \sqrt{7 \cdot 5}}{\sqrt{37 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{111}} \approx$$

$$\approx 0{,}56$$

4

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + \lambda X_2 + \lambda^2 X_3}{3\lambda^2}$$

$$E[\hat{\theta}] = \frac{1+\lambda+\lambda^2}{3\lambda^2}\mu$$

$E[\hat{\theta}]$ corrett se

$$\frac{1+\lambda+\lambda^2}{3\lambda^2} = 1$$

$$1+\lambda+\lambda^2 = 3\lambda^2$$

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 - \frac{1}{2} X_2 + \frac{1}{4} X_3}{3 \cdot \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{4X_1 - 2X_2 + X_3}{3}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{9}(16+4+1)\sigma^2 =$$

$$= \frac{21}{9}\sigma^2 = \frac{7}{3}\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{3}\sigma^2$$

$\hat{\theta}_2$ è più efficace