Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2023/2024
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 21 febbraio 2024

1. Sia $p = P(\text{“1”})$ la probabilità di ottenere “1” in un dado non equilibrato. Le probabilità delle altre facce sono così determinate: $P(\text{“2”}) = 2\,p$, $P(\text{“4”}) = p$, $P(\text{“3”}) = P(\text{“6”}) = 4\,p$ e $P(\text{“5”}) = 3\,p$. Si chiede di:
   - determinare il valore di p e la conseguente distribuzione di probabilità;
   - determinare il valor medio e la varianza dei punteggi;
   - usando la disuguaglianza di Chebyshev, fornire un limite inferiore alla probablità che il punteggio sia compreso tra “2” e “6”.

$P(1) = p$; $P(2) = 2p$; $P(3) = 4p$

$P(4) = p$; $P(5) = 3p$; $P(6) = 4p$

Normalizzazione : $\underbrace{\sum_i P(i)}_{15p} = 1$

$p = \frac{1}{15}$

Distribuzione : $P(1) = \frac{1}{15}$, $P(2) = \frac{2}{15}$;

$$P(3) = \frac{4}{15} \; ; \quad P(4) = \frac{1}{15} \; ;$$

$$P(5) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \; ; \quad P(6) = \frac{4}{15}$$

$$E[X] = \frac{1}{15} \{1 + 4 + 12 + 4 + 15 + 24\} =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot 60 = 4$$

$$E[X^2] = \frac{1}{15} \{1 + 8 + 36 + 16 + 75 + 144\} =$$

$$= \frac{1}{15} 280 = \frac{56}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{56}{3} - 16 = \frac{8}{3}$$

$$P(2 < X < 6) = P(|X-4| < 2) =$$

$$= 1 - P(|X-4| \geq 2) \geq 1 - \frac{8/3}{4} =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2. In uno studio medico operano due dottori, A e B, ai quali arrivano in media λ_A e λ_B pazienti all'ora, distribuiti secondo la legge di Poisson.

   - Quanti pazienti giungono complessivamente in media ogni mezz'ora allo studio medico?
   - Qual è la probabilità che non giunga nessun paziente allo studio medico in mezz'ora?

   Siano ora $\lambda_A = 5$ e $\lambda_B = 7$.

   - Rispondere numericamente alle due domande precedenti;
   - Supponendo che siano giunti 7 pazienti in mezz'ora, qual è la probabilità che vi giungano 13 in un'ora?

- Nello studio giungono $\lambda_A + \lambda_B$ pazienti all'ora, quindi $\frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}$ ogni mezz'ora

- Sia X il numero di pazienti ogni mezz'ora.

$$P(X=0) = e^{-\frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}}$$

- Con $\lambda_A = 5$ e $\lambda_B = 7$ $\frac{\lambda_A + \lambda_B}{2} = 6$

$$P(X=0) = e^{-6} \simeq 0.0025$$

- Sia $Y \sim Poi\left(\frac{\lambda_A+\lambda_B}{2}\right)$ il numero di pazienti nella seconda mattina

$$P(X+Y=13 \mid X=7) = \frac{P(X+Y=13,\ X=7)}{P(X=7)} =$$

$$= \frac{P(Y=6)\cdot P(X=7)}{P(X=7)} = P(Y=6) =$$

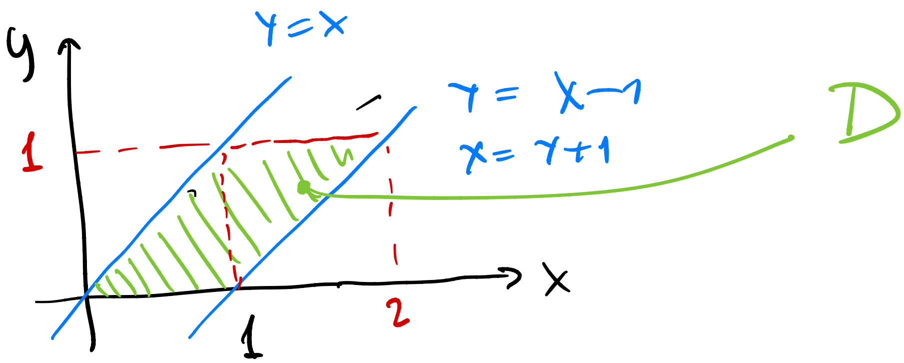
$$= e^{-6}\,\frac{6^6}{6!} = 0.161$$

3. Due variabili casuali X ed Y hanno densità congiunta uniforme sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x - 1 \leq y \leq x\}$$

. Determinare

- il valore della densità;
- le densità marginali; X e Y sono indipendenti?
- media, varianza e coefficiente di correlazione di X e Y.



$f(x,y) = c$ in D

$= 0$ altrimenti

Normalizzazione: $\iint_D c\,dx\,dy = C\|D\| = c \cdot 1$

$\Rightarrow C = 1$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int f(x,y)\,dy =$$

$$= \begin{cases} \int_0^x dy = x, & 0 \le x \le 1 \\ \int_{x-1}^1 dy = 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx = \int_y^{y+1} dx = 1$$

$$0 \le y \le 1$$

$f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ NON INDIP.

$$E[X] = \int_0^2 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left(3 - \frac{8-1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{9-7}{3} = 1$$

$$E[Y] = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x^2(2-x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} + \left[2\,\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \left(2\,\frac{7}{3} - \frac{15}{4}\right) = \frac{14}{3} - \frac{14}{4} = \frac{7}{6}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}$$

$$E[XY] = \iint_D 1\cdot xy\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_y^{y+1} dx\; xy = \int_0^1 dy\; y\,\frac{(y+1)^2 - y^2}{2} =$$

$$= \int_0^1 dy\; y\,\frac{2y+1}{2} = \frac{1}{2}\left[2\,\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\rho = \frac{1/12}{\sqrt{(1/6)(1/12)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. Un campione di 5 confezioni di pasta fornisce i seguenti dati sul loro peso (in grammi):

508 498 499 502 490

Determinare gli intervalli di confidenza al 90 %, 95 % e 99 %.

$n=5$ varianza incognita $\Rightarrow$ Student

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(4) = \begin{cases} 2.132 & \text{al } 90\% \\ 2.776 & \text{al } 95\% \\ 4.604 & \text{al } 99\% \end{cases}$$

$$\bar{X}_n = 499.4 \qquad \sigma^2 = 42.8$$

$$I_\alpha = \left(\bar{X}_n - t_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + t_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$I_{90} = (493.16,\ 505.64)$$

$$I_{95} = (491.28,\ 507.52)$$

$$I_{99} = (485.93,\ 512.87)$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2023/2024
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 21 febbraio 2024

1. Sia $p = P(“3”)$ la probabilità di ottenere “3” in un dado non equilibrato. Le probabilità delle altre facce sono così determinate: $P(“1”) = 6\,p$, $P(“2”) = 3\,p$, $P(“4”) = P(“5”) = p$ mentre la faccia “6” non può uscire. Si chiede di:
   - determinare il valore di p e la conseguente distribuzione di probabilità;
   - determinare il valor medio e la varianza dei punteggi;
   - usando la disuguaglianza di Chebyshev, fornire un limite inferiore alla probablità che il punteggio sia compreso tra “1” e “3”.

$P(1) = 6p$; $P(2) = 3p$; $P(3) = p$

$P(4) = p$; $P(5) = p$; $P(6) = 0$

$\sum_i P(i) = 1 \longrightarrow 12p = 1 \qquad p = \frac{1}{12}$

$E[X] = \frac{1}{12}(6 + 6 + 3 + 4 + 5) = 2$

$E[X^2] = \frac{1}{12}(6 + 12 + 9 + 16 + 25) = \frac{68}{12} = \frac{17}{3}$

$$Var(X) = \frac{17}{3} - 4 = \frac{5}{3}$$

$$P(1 < X < 3) = P(|X-2| < 1) =$$

$$= 1 - P(|X-2| \geq 1) > 1 - \frac{5/3}{1} =$$

$$= -\frac{2}{3}$$

2. Un aeroporto usa due piste di atterraggio, pista A e pista B, alle quali atterrano in media λ_A e λ_B velivoli all'ora, distribuiti secondo la legge di Poisson.

   - Quanti velivoli giungono complessivamente in media ogni mezz'ora all'aeroporto?
   - Qual è la probabilità che non atterri nessun velivolo in mezz'ora?

   Siano ora $\lambda_A = 10$ e $\lambda_B = 12$.

   - Rispondere numericamente alle due domande precedenti;
   - Supponendo che siano atterrati in aeroporto complessivamente 15 velivoli in mezz'ora, qual è la probabilità che vi atterrino 25 in un'ora?

Complessivamente $\lambda_A + \lambda_B$ all'ora

quindi $\frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}$ in mezz'ora

Sia X il numero di velivoli in mezz'ora. $P(X=0) = e^{-(\lambda_A+\lambda_B)/2}$

Con $\lambda_A = 10$ e $\lambda_B = 12$

$\frac{\lambda_A+\lambda_B}{2} = 11$ e $P(X=0) = e^{-11} \simeq 1.67 \cdot 10^{-5}$

- Sia $Y \sim Poi\left(\frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}\right)$ il numero di velivoli nella seconda mattina

$$P(X+Y=25 \mid X=15) = \frac{P(X+Y=25,\ X=15)}{P(X=15)} =$$

$$= \frac{P(Y=10) \cdot P(X=15)}{P(X=15)} = P(Y=10) =$$

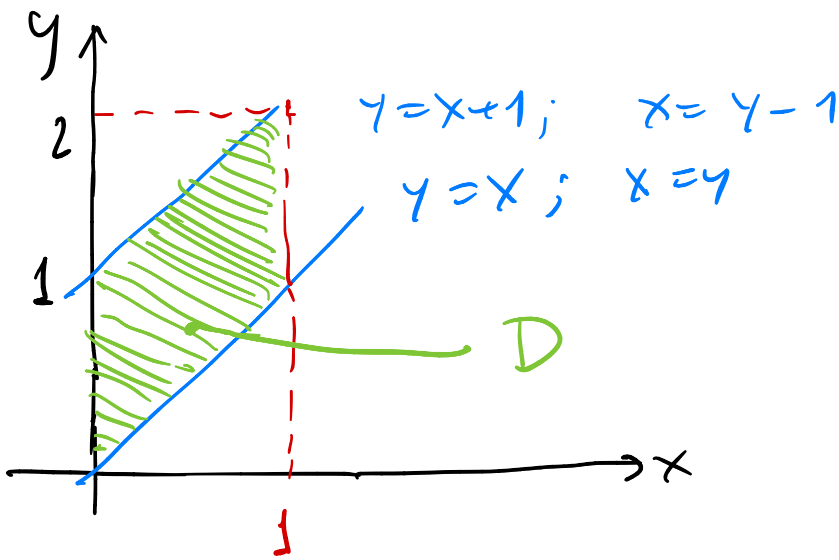
$$= e^{-11} \frac{11^{10}}{10!} \simeq 0.12$$

3. Due variabili casuali X ed Y hanno densità congiunta uniforme sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x + 1\}$$

. Determinare

- il valore della densità;
- le densità marginali; X e Y sono indipendenti?
- media, varianza e coefficiente di correlazione di X e Y.



$\|D\| = 1$

$f(x,y) = c \qquad (x,y) \in D$

$\qquad = 0$ altrimenti

Normalizzazione: $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = 1$

$$1 = \iint c \, dx\,dy = c \, \|D\| = c$$

$$c = 1$$

$$f_X(x) = \int_x^{x+1} c \, dy = 1 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = \int c \, dx =$$

$$= \begin{cases} \int_0^y dx = y & 0 \leq y \leq 1 \\ \int_{y-1}^1 dx = 2-y & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$f(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$$ NON INDIP.

$$E[X] = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y^2\,dy + \int_1^2 y(2-y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{3} + \left[y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \left[3 - \frac{7}{3} \right] = 1$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^3\,dy + \int_1^2 y^2(2-y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{4} + \left[2\,\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \left(2\,\frac{7}{3} - \frac{15}{4}\right) = \frac{14}{3} - \frac{14}{4} =$$

$$= \frac{7}{6}$$

$$E[XY] = \int_0^1 dx \int_x^{x+1} dy\; xy =$$

$$= \int_0^1 dx\, x \int_x^{x+1} y\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx\, x\, \frac{(x+1)^2 - x^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \; x\,(2x+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\,\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}$$

$$\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\mathrm{Var}(\tau) = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\rho = \frac{1/12}{\sqrt{1/6 \cdot 1/12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. Un campione di 5 confezioni di cereali fornisce i seguenti dati sul loro peso (in grammi):

370 372 373 376 377

Determinare gli intervalli di confidenza al 90 %, 95 % e 99 %.

$n = 5$ varianza incognita $\Rightarrow$ Student

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(4) = \begin{cases} 2.132 & \text{al } 90\% \\ 2.776 & \text{al } 95\% \\ 4.604 & \text{al } 99\% \end{cases}$$

$\bar{X}_n = 373.6 \qquad \sigma^2 = 8.3$

$$I_\alpha = \left(\bar{X}_n - t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X}_n + t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$I_{90} = (370.85, 376.35)$

$I_{95} = (370.02, 377.18)$

$I_{99} = (367.67, 379.53)$