Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2023/2024
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 12 gennaio 2024

1. Un gruppo di sportivi è costituito per il 70 % da calciatori, il 20 % da tennisti e 10 % da ciclisti. Si sa che un farmaco, atto a migliorare le prestazioni sportive, è efficace sul 40 % dei soggetti che giocano a calcio, sul 30 % dei tennisti e sull'80 % dei ciclisti. Se un soggetto scelto a caso nella popolazione ha beneficiato dell'efficacia del farmaco, qual è la probabilità che sia un ciclista?

Definiamo gli eventi

F = "l'individuo è un calciatore"

T = " " tennista"

C = " " ciclista"

E = "farmaco efficace"

I dati del problema sono:

$P(F) = 0.7$ $\quad P(T) = 0.2$

$P(C) = 0.1$

$P(E|F) = 0.4$

$P(E|T) = 0.3$

$P(E|C) = 0.8$

Si chiede $P(C|E) = ?$

Con Bayes:

$$P(C|E) = P(E|C) \frac{P(C)}{P(E)}$$

Dal teorema della probabilità totali:

$$P(E) = P(E|F)\,P(F) + P(E|T)\,P(T) +$$
$$+ P(E|C)\,P(C) =$$
$$= 0.4 \times 0.7 + 0.3 \times 0.2 + 0.8 \times 0.1 =$$
$$= 0.42$$

Da cui $P(C|E) = 0.8 \times \frac{0.1}{0.42} = 0.19$

2. Si sa che il 10 % delle mele prodotte da un agricoltore è guasto. Egli vende le mele in cassette da 30 mele ciascuna; qual è la probabilità che in una cassetta scelta a caso vi siano

   - 2 mele guaste?
   - nessuna mela guasta?
   - al più una mela guasta?

Definiamo la variabile

$X =$ "numero di mele guaste in una cassetta"

Abbiamo dal testo: $X \sim B(30, p)$

con $p = 0.1$

Si chiede:

- $P(X = 2)$
- $P(X = 0)$
- $P(X \leq 1)$

$$\cdot\ P(X=2) = \binom{30}{2} (0.1)^2 (0.9)^{28} =$$

$$= 0.228$$

$$\cdot\ P(X=0) = \binom{30}{0} (0.1)^0 (0.9)^{30} =$$

$$= 0.0424$$

$$\cdot\ P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) =$$

$$= 0.184$$

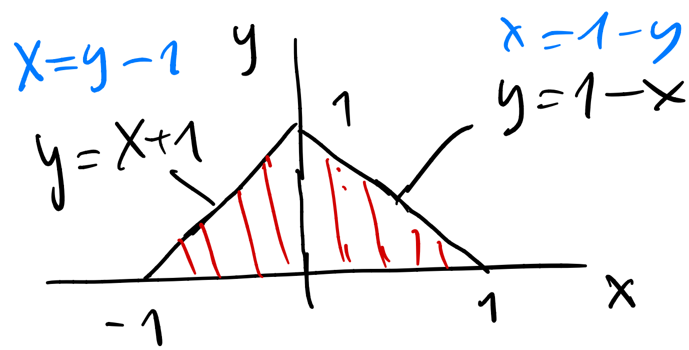
3. Due variabili casuali X ed Y hanno densità congiunta uniforme sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - |x|\}$$

. Determinare

- il valore della densità;
- le densità marginali; X e Y sono indipendenti?
- media, varianza e coefficiente di correlazione di X e Y.

Dominio :



$$f(x,y) = c \quad \text{se} \quad (x,y) \in D$$
$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

Si chiede:

- $c = ?$
- f_X, f_Y, indipendenza
- $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, ρ

- Dalla normalizzazione

$$\iint_D c\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c\cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = 1$$

- $$f_X(x) = \int_0^{1-|x|} c\,dy = 1-|x|, \quad x\in[-1,1]$$

$$f_Y(y) = \int_{y-1}^{1-y} dx = 2-2y \qquad y\in[0,1]$$

$$f_X(x)\,f_Y(y) \neq f(x,y)$$

Le variabili NON sono indipendenti

$$E[X] = \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx = 0$$

$$E[X^2] = \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\,dx = \frac{2}{3} - 2\int_0^1 x^2 \cdot x\,dx =$$

$$= \frac{2}{3} - 2\,\frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y(2-2y)\,dy = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$E[Y^2] = 2\int_0^1 y^2(1-y)\,dy = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6} \qquad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$E[XY] = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-|x|} dy\, xy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx\, x \frac{(1-|x|)^2}{2} = 0$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho = 0$$

4. Un campione di 5 confezioni di pasta fornisce i seguenti dati sul loro peso (in grammi):

508 498 499 502 490

Sottoporre a test d'ipotesi l'affermazione della ditta, che le confezioni contengono 500 gr ciascuna.

$n = 5$ varianza incognita $\Rightarrow$ Student

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(4) = \begin{cases} 2.132 & \text{al } 90\% \\ 2.776 & \text{al } 95\% \\ 4.604 & \text{al } 99\% \end{cases}$$

$$\bar{X}_n = 499.4 \qquad \sigma^2 = 42.8$$

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{499.4 - 500}{\sqrt{42.8/n}} = -0.2$$

accettazione a tutti i livelli

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2023/2024
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 12 gennaio 2024

1. Un gruppo di bambini e bambine svolge delle attività ricreative; il 30 % gioca a scacchi; il 30 % fa teatro e il 40 % musica. Si sa che il 20 % degli scacchisti, il 20 % dei soggetti che fanno teatro e l'30 % dei musicisti sono figli unici. Se un bambino scelto a caso è figlio unico, qual è la probabilità che sia un musicista?

Definiamo gli eventi

S = "il bambino gioca a scacchi"

T = " fa teatro "

M = " " musica "

U = " figlio/a unico/a "

I dati del problema sono:

$P(S) = 0.3$ $\quad P(T) = 0.3$

$P(M) = 0.4$

$P(U|S) = 0.2$

$P(U|T) = 0.2$

$P(U|M) = 0.3$

Si chiede $P(M|U) = ?$

Con Bayes:

$$P(M|U) = P(U|M)\,\frac{P(M)}{P(U)}$$

Dal teorema della probabilità totali:

$$P(U) = P(U|S)P(S) + P(U|T)P(T) +$$

$$+ P(U|M)P(M) =$$

$$= 0.2 \times 0.3 + 0.2 \times 0.3 + 0.3 \times 0.4 =$$

$$= 0.24$$

Da cui $P(M|U) = 0.3 \times \frac{0.4}{0.24} = 0.5$

2. Si sa che il 5 % delle uova pasquali prodotte da una ditta non contiene la sorpresa. La ditta vende le uova in lotti da 20 uova ciascuna; qual è la probabilità che in un lotto scelto a caso vi siano

   - 3 uova senza sorpresa?
   - nessuna uovo senza sorpresa?
   - al più un uovo senza sorpresa?

Definiamo la variabile

$X =$ "numero di uova senza sorpresa in un lotto"

Abbiamo dal testo: $X \sim B(20, p)$

con $p = 0.05$

Si chiede:

- $P(X=3)$
- $P(X=0)$
- $P(X \leq 1)$

$$\cdot\ P(X=3) = \binom{20}{3}(0.05)^3(0.95)^{17} =$$

$$= 0.0596$$

$$\cdot\ P(X=0) = \binom{20}{0}(0.05)^0(0.95)^{20} =$$

$$= 0.358$$

$$\cdot\ P(X\leq 1) = P(X=0) + P(X=1) =$$

$$= 0.736$$

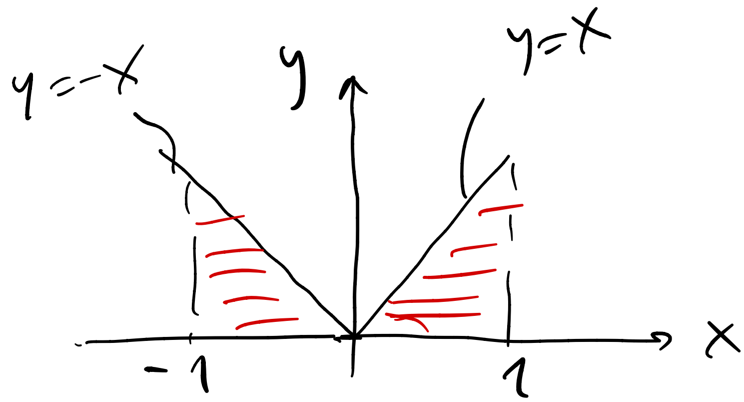
3. Due variabili casuali X ed Y hanno densità congiunta uniforme sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq |x|\}$$

. Determinare

- il valore della densità;
- le densità marginali; X e Y sono indipendenti?
- media, varianza e coefficiente di correlazione di X e Y.

Dominio :



$$f(x,y) = c \quad \text{se} \quad (x,y) \in D$$
$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

Si chiede :

- $c = ?$
- f_X, f_Y, indipendenza
- $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, ρ

- Dalla normalizzazione

$$\iint_D c\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = 1$$

- $$f_X(x) = \int_0^{|x|} c\,dy = |x|, \quad x \in [-1,1]$$

$$f_Y(y) = \int_{-1}^{-y} dx + \int_y^1 dx = 2(1-y)$$

$$y \in [0,1]$$

$$f_X(x)\, f_Y(y) \neq f(x,y)$$

Le variabili NON sono indipendenti

$$E[X] = \int_{-1}^{1} x\,|x| = 0$$

$$E[X^2] = \int_{-1}^{1} x^2 |x|\, dx = 2\int_0^1 x^3\, dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y(2-2y)\,dy = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$E[Y^2] = 2\int_0^1 y^2(1-y)\,dy = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$E[XY] = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{|x|} dy\, xy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx\, x \cdot \frac{|x|^2}{2} = 0$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho = 0$$

4. Un campione di 5 confezioni di cereali fornisce i seguenti dati sul loro peso (in grammi):

370 372 373 376 377

Sottoporre a test d'ipotesi l'affermazione della ditta, che le confezioni contengono 375 gr ciascuna.

$n = 5$ varianza incognita $\Rightarrow$ Student

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(4) = \begin{cases} 2.132 & \text{al } 90\% \\ 2.776 & \text{al } 95\% \\ 4.604 & \text{al } 99\% \end{cases}$$

$\bar{X}_n = 373.6 \qquad \sigma^2 = 8.3$

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{373.6 - 375}{\sqrt{8.3/n}} = -1.09$$

accettazione a tutti i livelli