Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 20 aprile 2023

1. Marco Polo deve prendere il treno per recarsi a Venezia. Nell'orario di suo interesse ci sono due treni utili: il treno A e il treno B. La durata del viaggio di ciascun treno è distribuita uniformemente tra 15 e 25 minuti per il treno A e tra 20 e 40 minuti per il treno B. Marco Polo decide quale treno prendere lanciando una moneta di parametro p: se esce Testa prende il treno A, se esce croce prende il treno B. Detta X la variabile che rappresenta la durata del viaggio,
   - scrivere la funzione di ripartizione di X;
   - qual è la probabilità che il viaggio duri più di 20 minuti?
   - qual è la probabilità che il viaggio duri meno di 25 minuti?

2. Una variabile aleatoria vettoriale (X, Y) è distribuita uniformemente sulla regione

   $$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$$

   Determinare:
   - la distribuzione congiunta f_{XY};
   - le distribuzioni marginali f_X ed f_Y;
   - le medie e le varianze di X e Y;
   - il coefficiente di correlazione.

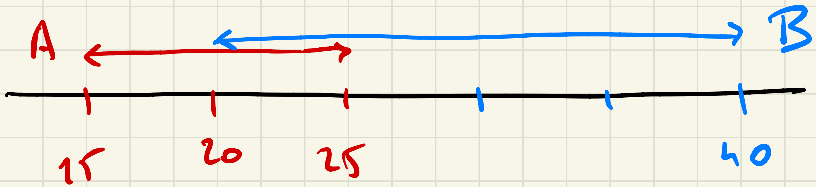
   Infine, dire se X ed Y sono indipendenti.

3. Un giornalista afferma che il reddito medio mensile delle famiglie in due regioni contigue, A e B, sono uguali. Per verificare tale affermazione viene selezionato un campione in ciascuna regione, ottenendo:

N_A	N_B	$\overline{X}_A$	$\overline{X}_B$	σ_A^2	σ_B^2
80	100	4	4.5	1	4

   dove $\overline{X}_A$ e $\overline{X}_B$ sono i redditi mensili in migliaia di euro e σ_A^2 e σ_B^2 le varianze (note) delle due popolazioni. Eseguire il test d'ipotesi bilaterale al 10%, 5% e 1%.

① Schema riassuntivo



$$P(A) = p$$

$$P(B) = 1 - p$$

X_A = durata viaggio A

X_B = durata viaggio B

X = durata del viaggio

$$f_A(t) = \frac{1}{10} \quad \text{per } t \in [15, 25]$$
$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

$$f_B(t) = \frac{1}{20} \quad \text{per } t \in [20, 40]$$
$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

Funzione di ripartizione di X:

$$F_X(t) = P(X \leq t) =$$

$$= P(X_A \leq t \mid A)\, P(A) + P(X_B \leq t \mid B)\, P(B) =$$

$$= P(X_A \leq t \mid A)\, p + P(X_B \leq t \mid B)\,(1-p)$$

- Per $t \leq 15$ $\quad F_X(t) = 0$
- Per $15 \leq t \leq 20$ $\quad F_X(t) = P(X_A \leq t \mid A)\, p =$

$$= \frac{1}{10}(t-15)\, p$$

• per $20 \leq t \leq 25$

$$F_X(t) = P(X_A \leq t \mid A)\, p + P(X_B \leq t \mid B)(1-p)$$

$$= \frac{t-15}{10}\, p + \frac{t-20}{20}(1-p)$$

• per $25 \leq t \leq 40$

$$F_X(t) = P(X_A \leq t \mid A)\, p + P(X_B \leq t \mid B)(1-p) =$$

$$= p + \frac{t-20}{20}(1-p)$$

• per $t \geq 40$ $\qquad F_X(t) = 1$

Verifica di continuità:

$$\lim_{t \to 15^-} F_X(t) = \lim_{t \to 15^+} F_X(t) = 0$$

$$\lim_{t \to 20^-} F_X(t) = \lim_{t \to 20^+} F_X(t) = \frac{1}{2} p$$

$$\lim_{t \to 25^-} F_X(t) = p + \frac{1-p}{4} = \lim_{t \to 25^+} F_X(t)$$

$$\lim_{t \to 40^-} F_X(t) = p + 1 - p = 1 = \lim_{t \to 40^+} F_X(t)$$

$$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - F_X(20) =$$

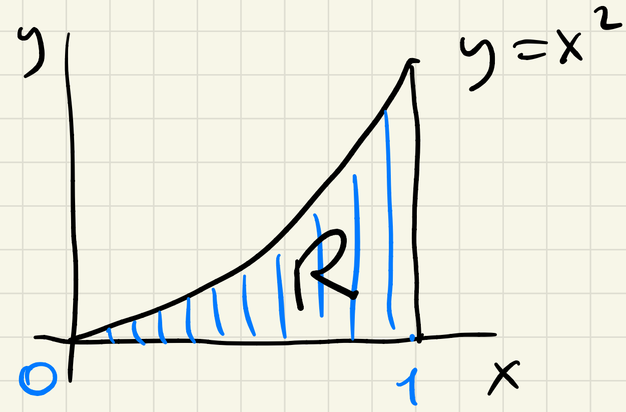
$$= 1 - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$$

$$P(X < 25) = F_X(25) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}p$$

② $f(x, y)$ uniforme in

$$R = \{ (x, y), \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x^2 \}$$

Graficamente:



$$f(x,y) = C \quad \text{per } (x,y) \in R$$
$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

$C = ?$ $\qquad \iint_R f(x,y) = 1$ normalizzazione

$$\iint_R f(x,y) = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \; C = C \int_0^1 dx \cdot x^2 =$$

$$= c \cdot \frac{1}{3} \implies \boxed{c = 3}$$

$$f_X(x) = \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy = 3x^2 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,dx = 3\left(1-\sqrt{y}\right) \qquad 0 \le y \le 1$$

$$f_X(x)\, f_Y(y) \neq f(x,y)$$ NON INDIPENDENTI

$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 3x^3\,dx = \frac{3}{4}$$

$$E[Y] = \int_0^1 3y(1-\sqrt{y})\,dy = 3\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{5}y^{5/2}\Big|_0^1\right] = \frac{3}{10}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2\,dx = \frac{3}{5}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2\, 3(1-\sqrt{y})\,dy = 1 - 3\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

$$E[XY] = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\, f(x,y)\,xy = 3\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\, xy = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{7} - \frac{9}{100} = \frac{100-63}{700} = \frac{37}{700}$$

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{1}{4} - \frac{9}{40} = \frac{1}{40}$$

$$\rho = \frac{1/40}{\sqrt{(3/80)(37/700)}} = \sqrt{\frac{35}{111}} \approx 0.56$$

3

$$z = \frac{|\bar{X}_A - \bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \approx 2.18$$

$$z_{\alpha/2} = \begin{cases} 1.645 & \alpha \quad 10\% \\ 1.960 & \alpha \quad 5\% \\ 2.576 & \alpha \quad 1\% \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10\% \\ 5\% \end{array}\right\} \text{Rifiuto} \qquad 1\% \ \} \ \text{Accetto}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 20 aprile 2023

1. Mario scommette alle corse dei cavalli e può puntare sul cavallo A o sul cavallo B. La vincita in ciascun caso è distribuita uniformemente tra 100 e 300 euro per il cavallo A e tra 200 e 500 euro per il cavallo B. Mario decide su quale cavallo puntare lanciando una moneta di parametro p: se esce Testa punta sul cavallo A, se esce croce sul cavallo B. Detta X la variabile che rappresenta la la vincita,
   - scrivere la funzione di ripartizione di X;
   - qual è la probabilità che Mario vinca più di 200 euro?
   - qual è la probabilità che vinca meno di 300 euro?

2. Una variabile aleatoria vettoriale (X, Y) è distribuita uniformemente sulla regione
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$
   Determinare:
   - la distribuzione congiunta f_{XY};
   - le distribuzioni marginali f_X ed f_Y;
   - le medie e le varianze di X e Y;
   - il coefficiente di correlazione.

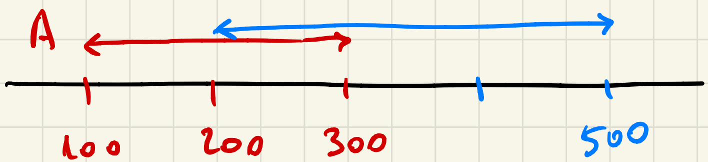
   Infine, dire se X ed Y sono indipendenti.

3. Un'agenzia afferma che i consumi medi annui di gas delle famiglie in due regioni contigue, A e B, sono uguali. Per verificare tale affermazione viene selezionato un campione in ciascuna regione, ottenendo:

N_A	N_B	$\overline{X}_A$	$\overline{X}_B$	σ_A^2	σ_B^2
80	100	1.1	1.19	0.09	0.16

   dove $\overline{X}_A$ e $\overline{X}_B$ sono i consumi annui in migliaia di mc e σ_A^2 e σ_B^2 le varianze (note) delle due popolazioni. Eseguire il test d'ipotesi bilaterale al 10%, 5% e 1%.

1 Schema riassuntivo



$$P(A) = p$$

$$P(B) = 1 - p$$

X_A = guadagno cavallo A

X_B = guadagno cavallo B

X = guadagno

$$f_A(t) = \frac{1}{200} \quad \text{per } t \in [100, 300]$$
$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

$$f_B(t) = \frac{1}{300} \quad \text{per } t \in [200, 500]$$
$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

Funzione di ripartizione di X:

$$F_X(t) = P(X \le t) =$$

$$= P(X_A \le t \mid A)\, P(A) + P(X_B \le t \mid B)\, P(B) =$$

$$= P(X_A \le t \mid A)\, p + P(X_B \le t \mid B)\,(1-p)$$

- Per $t \le 100$ $\quad F_X(t) = 0$

- Per $100 \le t \le 200$ $\quad F_X(t) = P(X_A \le t \mid A)\, p =$

$$= \frac{1}{200}(t-100)\, p$$

• per $200 \le t \le 300$

$$F_X(t) = P(X_A \le t \mid A)\, p + P(X_B \le t \mid B)\,(1-p)$$

$$= \frac{t-100}{200}\, p + \frac{t-200}{300}\,(1-p)$$

• per $300 \le t \le 500$

$$F_X(t) = P(X_A \le t \mid A)\, p + P(X_B \le t \mid B)\,(1-p) =$$

$$= p + \frac{t-200}{300}\,(1-p)$$

• per $t \geq 40$ $\qquad F_X(t) = 1$

Verifica di continuità:

$$\lim_{t \to 100^-} F_X(t) = \lim_{t \to 100^+} F_X(t) = 0$$

$$\lim_{t \to 200^-} F_X(t) = \lim_{t \to 200^+} F_X(t) = \frac{1}{2} p$$

$$\lim_{t \to 300^-} F_X(t) = p + \frac{1-p}{3} = \lim_{t \to 300^+} F_X(t)$$

$$\lim_{t \to 500^-} F_X(t) = p + 1 - p = 1 = \lim_{t \to 40^+} F_X(t)$$

$$P(X > 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - F_X(200) =$$

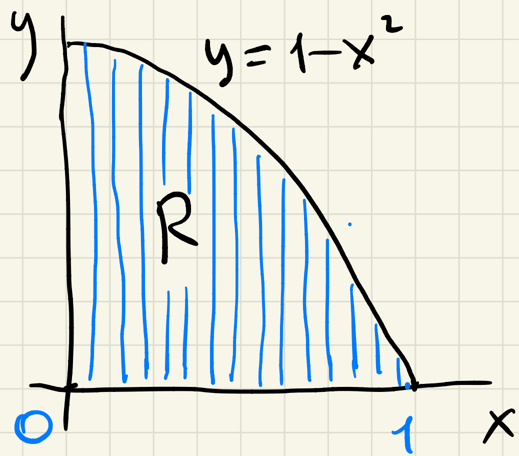
$$= 1 - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$$

$$P(X < 300) = F_X(300) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p$$

② $f(x,y)$ uniforme in

$$R = \{ (x,y),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x^2 \}$$

Graficamente:



$$x = \sqrt{1-y}$$

$$f(x,y) = C \quad \text{per } (x,y) \in R$$

$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

$C = ?$ $\qquad \iint_R f(x,y) = 1$ normalizzazione

$$\iint_R f(x,y) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy\, C = C \int_0^1 dx \cdot (1-x^2) = \frac{2}{3}$$

$$= c \cdot \frac{2}{3} \Longrightarrow \boxed{c = \frac{3}{2}}$$

$$f_X(x) = \int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy = \frac{3}{2}(1-x^2) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{1-y} \qquad 0 \le y \le 1$$

$$f_X(x)\, f_Y(y) \neq f(x,y)$$ NON INDIPENDENTI

$dy = 2t\,dt \quad 1-y = t^2 \quad y = 1-t^2$

$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x(1-x^2)\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

$$E[Y] = \frac{3}{2}\int_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 (1-t^2)2t^2\,dt = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \frac{3}{2}(1-x^2) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2}\,\frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \frac{3}{2}\sqrt{1-y}\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 (1-t^2)^2\, t \cdot 2t\,dt = \frac{8}{35}$$

$$E[XY] = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\, f(x,y)\, xy = \frac{3}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy\, xy = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{5} - \frac{9}{64} = \frac{64-45}{320} = \frac{19}{320}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{8}{35} - \frac{4}{25} = \frac{40-28}{25.7} = \frac{12}{175}$$

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{1}{8} - \frac{6}{40} = \frac{10-12}{80} = -\frac{1}{40}$$

$$\rho = \frac{-1/40}{\sqrt{(19/320)(12/175)}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{57}} \approx -0.392$$

3

$$z = \frac{|\bar{X}_A - \bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{N_A} + \frac{\sigma_B^2}{N_B}}} \approx 1.724$$

$$z_{\alpha/2} = \begin{cases} 1.645 & \text{al } 10\% \quad \text{Rifiuto} \\ 1.960 & \text{al } 5\% \\ 2.576 & \text{al } 1\% \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.960 \text{ al } 5\% \\ 2.576 \text{ al } 1\% \end{array}\right\} \text{Accetto}$$