Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 febbraio 2023

1. Il numero di bagnanti all'ora che accedono ad una spiaggia nel periodo estivo è rappresentato da una variabile di Poisson di media

   - $\lambda = 8$ nell'intervallo dalle ore 9 alle 13;
   - $\lambda = 12$ nell'intervallo dalle ore 13 alle 17.

   Determinare la probabilità che nell'intervallo tra le 12.45 e le 13.15 si presentino più di 3 persone.

2. Siano X e Y due variabili aleatorie la cui distribuzione congiunta è uniforme nel triangolo di vertici $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$.

   (a) Determinare il valore della distribuzione nel dominio;

   (b) determinare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, specificando esplicitamente per entrambe l'intervallo di definizione;

   (c) verificare se X ed Y sono indipendenti;

   (d) determinare media e varianza di X e Y;

   (e) determinare il valor medio del prodotto XY;

   (f) determinare il coefficiente di correlazione di X e Y.

3. Sia X una variabile casuale che rappresenta una popolazione di media μ e varianza σ^2. Sia inoltre $X_1, X_2, ..., X_n$ un campione indipendente di rango n estratto da tale popolazione. Dire se la statistica

$$\widehat{\Lambda^2} = \frac{1}{2(n-1)} \left[(X_2 - X_1)^2 + (X_3 - X_2)^2 + ... + (X_n - X_{n-1})^2 \right]$$

   è uno stimatore distorto, o meno, per la varianza.

1 $X \sim Poi(8)$ $Y \sim Poi(12)$

in 15' $X_1 \sim Poi(2)$ $Y_1 \sim Poi(3)$

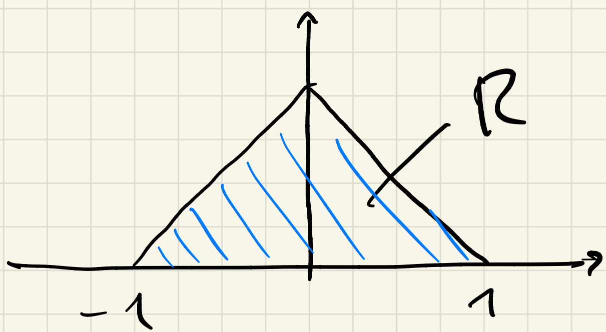
$X_1 + Y_1 \sim Poi(5)$

$P(X_1 + Y_1 > 3) = 1 - P(X_1 + Y_1 \leq 3) =$

$= 1 - e^{-5} \sum_{k=0}^{3} \frac{5^k}{k!} = 1 - \frac{118}{3e^5} =$

$$= 1 - 0.265 = 0.735$$

②



$$f(x,y) = \frac{1}{\|R\|} = 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{x+1} dy = x+1 & -1 \le x \le 0 \\ \end{cases}$$

$$\int_0^{1-x} dy = 1-x \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_{y-1}^{1-y} dx = 1-y-y+1 = 2(1-y) \qquad 0 \le y \le 1$$

X e Y non indipendenti perché

$$f_{XY} \neq f_X f_Y$$

$$E[X] = \int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = 0$$

$$E[Y] = \int_{0}^{1} y\,2(1-y)\,dy = \left[y^2 - 2\frac{y^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$E[X^2] = \int_{-1}^{0} x^2(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} - \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot 2(1-y)\, dy = 2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3-2}{18} = \frac{1}{18}$$

$$E[XY] = \int_{-1}^{0} dx \int_0^{x+1} dy\, xy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, xy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx\, x\, \frac{(x+1)^2}{2} + \int_0^1 dx\, x\, \frac{(1-x)^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,(-x)(1-x)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, x\,(1-x)^2 = 0$$

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = 0 \qquad \rho = 0$$

③ $$\hat{\Lambda}^2 = \frac{1}{2(n-1)}\left[(X_2-X_1)^2+(X_3-X_2)^2+\cdots+(X_n-X_{n-1})^2\right]$$

$$E\left[\hat{\Lambda}^2\right] = \frac{1}{2(n-1)}\left\{E\left[(X_2-X_1)^2\right]+E\left[(X_3-X_2)^2\right]+\cdots+E\left[(X_n-X_{n-1})^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\left\{E\left[(X_2-\mu+\mu-X_1)^2\right]+\cdots\right\} =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\left\{E\left[(X_2-\mu)^2\right]+E\left[(\mu-X_1)^2\right]+\overset{=0}{\cancel{E\left[(X_2-\mu)(\mu-X_1)\right]}}+\cdots\right\} =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)} \left\{ 2(n-1)\sigma^2 \right\} = \sigma^2$$

STIMATORE CORRETTO

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 febbraio 2023

1. Il numero di visitatori all'ora che accedono ad un museo è rappresentato da una variabile di Poisson di media

   - $\lambda = 24$ nell'intervallo dalle ore 9 alle 13;
   - $\lambda = 36$ nell'intervallo dalle ore 13 alle 17.

   Determinare la probabilità che nell'intervallo tra le 12.55 e le 13.05 si presentino più di 3 visitatori.

2. Siano X e Y due variabili aleatorie la cui distribuzione congiunta è uniforme nel triangolo di vertici $A = (-1, 1)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$.

   (a) Determinare il valore della distribuzione nel dominio;

   (b) determinare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, specificando esplicitamente per entrambe l'intervallo di definizione;

   (c) verificare se X ed Y sono indipendenti;

   (d) determinare media e varianza di X e Y;

   (e) determinare il valor medio del prodotto $X\,Y$;

   (f) determinare il coefficiente di correlazione di X e Y.

3. Sia X una variabile casuale che rappresenta una popolazione di media μ e varianza σ^2. Sia inoltre $X_1, X_2, ..., X_n$ un campione indipendente di rango n estratto da tale popolazione. Dire se la statistica

$$\widehat{\Lambda^2} = \frac{1}{2(n-1)} \left[(X_2 - X_1)^2 + (X_3 - X_2)^2 + ... + (X_n - X_{n-1})^2\right]$$

   è uno stimatore distorto, o meno, per la varianza.

1 $\quad X \sim Poi(24) \qquad Y \sim Poi(36)$

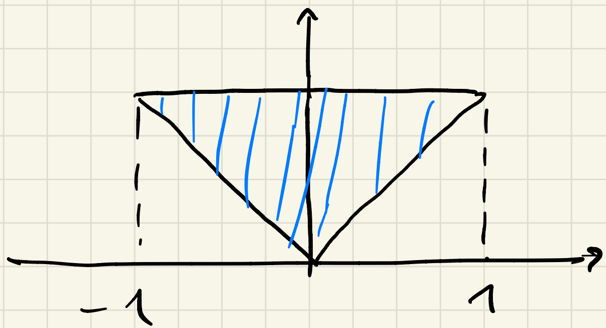
in $5'$ $\quad X_1 \sim Poi(2) \qquad Y_1 \sim Poi(3)$

$$X_1 + Y_1 \sim Poi(5)$$

$$P(X_1 + Y_1 > 3) = 1 - P(X_1 + Y_1 \leq 3) =$$

$$= 1 - e^{-5} \sum_{k=0}^{3} \frac{5^k}{k!} = 1 - \frac{118}{3e^5} =$$

$$= 1 - 0.265 = 0.735$$

② 

$$f(x,y) = \frac{1}{||R||} = 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-x}^{1} dy = 1 + x & -1 \le x \le 0 \\ \end{cases}$$

$$\int_x^1 dy = 1-x \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-y}^{y} dx = 2y \qquad 0 \le y \le 1$$

X e Y non indipendenti perché

$$f_{XY} \neq f_X f_Y$$

$$E[X] = \int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = 0$$

$$E[Y] = \int_{0}^{1} y \; 2y \, dy = 2\,\frac{y^3}{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$E[X^2] = \int_{-1}^{0} x^2(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx =$$

$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1} - \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot 2y\, dy = 2 \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

$$E[XY] = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} dy\, xy + \int_0^1 dx \int_x^1 dy\, xy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx\, x\, \frac{1-x^2}{2} + \int_0^1 dx\, x\, \frac{1-x^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,(-x)\,(1-x^2) + \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,x\,(1-x^2) = 0$$

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = 0 \qquad \rho = 0$$