Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2022/2023
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 13 gennaio 2023

1. Sia X una variabile di Bernoulli di parametro 0.7 (cioè $P(X = 1) = 0.7$). Due urne contengono rispettivamente 10 palline rosse e 3 palline blu (urna A) e 20 palline rosse e 4 bianche (urna B). Si estrae a caso una pallina, scegliendo l'urna in base alla realizzazione della variabile X: se $X = 0$ si estrae dall'urna A, se $X = 1$ si estrae dall'urna B.

   - Qual è la probabilità che la pallina estratta sia rossa?
   - Supponendo che la pallina estratta sia rossa, qual è la probabilità che sia stata estratta dall'urna A?

   Soluzione. Sia R l'evento "estrazione di una pallina rossa" e siano A e B gli eventi corrispondenti alle estrazioni rispettivamente dall'urna A e dall'urna B. Usando il teorema delle probabilità totali abbiamo per la prima domanda:

$$P(R) = P(R|A)\,P(A) + P(R|B)\,P(B) = \frac{10}{13}\,0.3 + \frac{20}{24}\,0.7 \approx 0.81$$

   Per la seconda domanda:

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)\,P(A)}{P(R)} = \frac{(10/13)\,0.3}{0.81} \approx 0.28$$

2. La legge individuata dalla densità
$$f(t) = \frac{\lambda}{2}\,e^{-\lambda\,|t|}$$
   è detta *Legge di Laplace* di parametro λ.

   (i) Mostrare che f è una densità di probabilità;

   (ii) calcolare media e varianza della legge di Laplace;

   (iii) Se X è una variabile aleatoria con legge di Laplace di parametro λ, quali sono le leggi delle variabili $\alpha\,X$ e $|X|$?

   Soluzione.

(i) Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda\,|t|}\,dt = \frac{\lambda}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\,t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda\,t}\,dt\right\} =$$
$$= \frac{\lambda}{2}\left\{\left[\frac{e^{\lambda\,t}}{\lambda}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-\lambda\,t}}{\lambda}\right]_{0}^{\infty}\right\} = \frac{\lambda}{2}\left\{\frac{1}{\lambda} - \frac{-1}{\lambda}\right\} = 1$$

(ii)

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} t\,f(t)\,dt = \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} t\,e^{-\lambda\,|t|}\,dt = 0$$
$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} t^2\,f(t)\,dt = \frac{\lambda}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0} t^2\,e^{\lambda\,t}\,dt + \int_{0}^{\infty} t^2\,e^{-\lambda\,t}\,dt\right\} = \lambda\int_{0}^{\infty} t^2\,e^{-\lambda\,t}\,dt =$$
$$= \lambda\left\{\left[t^2\,\frac{e^{-\lambda\,t}}{-\lambda}\right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} 2\,t\,\frac{e^{-\lambda\,t}}{\lambda}\right\} = 2\,\lambda\left\{\left[t\,\frac{e^{-\lambda\,t}}{-\lambda^2}\right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\,t}}{\lambda^2}.\right\} =$$
$$= 2\,\lambda\left[\frac{e^{-\lambda\,t}}{-\lambda^3}\right]_{0}^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

(iii) Notiamo innanzitutto che

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda\,|t|}\,dt =$$
$$(t<0):\quad = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda\,t}\,dt = \frac{e^{\lambda\,t}}{2}$$
$$(t>0):\quad = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\,t}\,dt + \frac{\lambda}{2}\int_{0}^{t} e^{-\lambda\,t}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\lambda\,t}\right) = 1 - \frac{1}{2}\,e^{-\lambda\,t}$$

Legge di $\alpha\,X$:

$$F_{\alpha\,X}(t) = P(\alpha\,X \le t) = P(X \le t/\alpha) = F_X(t/\alpha) =$$
$$(t<0):\quad = \frac{e^{(\lambda/\alpha)\,t}}{2}$$
$$(t>0):\quad = 1 - \frac{1}{2}\,e^{-(\lambda/\alpha)\,t}$$

Legge di $|X|$ (notare che $|X| \ge 0$ e quindi $t \ge 0$ in quel che segue):

$$F_{|X|}(t) = P(|X| \le t) = P(-t \le X \le t) = F_X(t) - F_X(-t) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\,e^{-\lambda\,t} - \frac{-e^{\lambda\,t}}{2} = 1 - e^{-\lambda\,t}$$

3. Un pedone procede a caso nel reticolo di strade e incroci che si estende in una città a reticolato romano. Siano x e y due coordinate che descrivono i punti del reticolo, con il punto di partenza nell'origine O. A ogni incrocio, egli può dirigersi di un isolato nella direzione positiva delle x con probabilità $1/3$ o di un isolato nella direzione positiva delle y con probabilità $2/3$. Indichiamo con X e Y le variabili casuali che indicano la posizione dopo 5 passi.

(a) Determinare la densità congiunta di X e Y;

(b) determinare le densità marginali di X e Y;

(c) verificare se X ed Y sono indipendenti;

(d) determinare media e varianza di X e Y;

(f) determinare il coefficiente di correlazione di X e Y commentandone il risultato.

Soluzione.

(a) Le due variabili possono, singolarmente, assumere i valori $1, 2, ..., 5$. La densità congiunta deve comunque verificare $X + Y = 5$. Quindi abbiamo

$$
\begin{aligned}
p_{XY}(5,0) &= (1/3)^5 = 1/243 \\
p_{XY}(4,1) &= \binom{5}{1} (1/3)^4 (2/3) = 10/243 \\
p_{XY}(3,2) &= \binom{5}{2} (1/3)^3 (2/3)^2 = 40/243 \\
p_{XY}(2,3) &= \binom{5}{3} (1/3)^2 (2/3)^3 = 80/243 \\
p_{XY}(1,4) &= \binom{5}{4} (1/3) (2/3)^4 = 80/243 \\
p_{XY}(0,5) &= (2/3)^5 = 32/243
\end{aligned}
$$

e $p_{XY}(x, y) = 0$ per gli tutti altri valori di x e y. In forma compatta:

$$p_{XY}(k,l) = \binom{5}{l} (1/3)^k (2/3)^l \, \delta_{l,5-k}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
p_X(0) &= p_Y(5) = 32/243 \\
p_X(1) &= p_Y(4) = 80/243 \\
p_X(2) &= p_Y(3) = 80/243 \\
p_X(3) &= p_Y(2) = 40/243 \\
p_X(4) &= p_Y(1) = 10/243 \\
p_X(5) &= p_Y(0) = 1/243
\end{aligned}
$$

(c) chiaramente X ed Y non sono indipendenti;

(d) chiaramente X e Y sono binomiali di parametri $1/3$ e $2/3$; quindi

$$
\begin{aligned}
E[X] &= 5 \cdot 1/3 = 5/3 \\
E[Y] &= 5 \cdot 2/3 = 10/3 \\
Var(X) &= Var(Y) = 5\,1/3\,21/3 = 10/9
\end{aligned}
$$

(f) calcolo della covarianza:

$$
\begin{aligned}
E[X\,Y] &= \sum_{k=0}^{5} k\,(5-k)\,p_{XY}(k, 5-k) = 40/9 = \\
Cov(X,Y) &= E[X\,Y] - E[X]\,E[Y] = 40/9 - 50/9 = -10/9
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\rho = \frac{-1/9}{\sqrt{100/81}} = -1$$

4. Un canile ha a disposizione 48 porzioni di cibo per cani. La quantità consumata in un giorno è rappresentata da una variabile casuale di media $\mu = 5$ confezioni e deviazione standard $\sigma = 1$. Usando l'approssimazione normale, calcolare la probabilità che il cibo a disposizione basti per 10 giorni.

Soluzione. Siano X_1, X_2, ..., X_{10} le quantità consumate nel primo, nel secondo, ..., nel decimo giorno. La probabilità richiesta è (con $n = 10$)

$$P(X_1 + X_2 + ... + X_{10} \leq 48) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_{10} - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \leq \frac{48 - 10 \cdot 5}{\sqrt{10}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx \Phi(-0.63) = 1 - \Phi(0.63) \approx 1 - 0.7357 = 0.2643$$