Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2021/2022
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 7 settembre 2022

1. La probabilità congiunta di due variabili X ed Y è data dalla relazione

$$f(x,y) = \alpha \left(x^2 + \frac{x\,y}{2} \right), \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 2.$$

   (a) Determinare il valore di α;
   (b) calcolare le densità marginali;
   (c) dire se X e Y sono indipendenti o meno;
   (d) determinare $P(X < Y)$.

Soluzione.

   (a) Deve essere

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dy f(x,y) = 1,$$

   che fornisce $\alpha = 6/7$, valore usato d'ora in poi nella funzione f.

   (b)

$$f_X(x) = \int_0^2 dy\, f(x,y) = \frac{6}{7}\,(x + 2\,x^2)$$
$$f_Y(y) = \int_0^1 dx\, f(x,y) = \frac{6}{7}\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{4}\right)$$

   (c) Non sono indipendenti.
   (d) È l'integrale di $f(x,y)$ sulla regione di piano data da

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2\},$$

   che fornisce

$$\int_0^1 dx \int_x^2 dy\, f(x,y) = \frac{41}{56}$$

2. Si sa dalle statistiche degli anni precedenti che, in una data regione, ci sono in media 2 giorni di pioggia ogni settimana, distribuiti secondo la legge di Poisson. Quant' è la probabilità che

(i) ci siano più di 3 giorni di pioggia in esattamente 2 settimane in un mese (con 1 mese=4 settimane)?

(ii) non ci sia nessun giorno di pioggia in un mese?

(iii) in un dato mese, esista una settimana senza pioggi?

Soluzione.

(i) La probabilità p che ci siano più di 3 gg di pioggia in una settimana è data da

$$p = \sum_{k=4}^{\infty} e^{-2}\,\frac{2^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-2}\,\frac{2^k}{k!} = 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right) = e^{-2}\,\frac{19}{3} \approx 0.857$$

quindi la probabilità che ci siano esattamente due settimane su quattro in cui ciò avviene segue la legge binomiale $B(4,p)$. Abbiamo quindi per tale probabilità:

$$\binom{4}{2} p^2\,(1-p)^2 \approx 0.09$$

(ii) La probabilità p che non ci sia nessun giorno piovoso in una settimana è e^{-2}; quindi la probabilità che non ci sia nessun giorno di pioggia in quattro settimane è

$$(e^{-2})^4 = e^{-8} \approx 3.3\ 10^{-4}$$

(iii) Seguendo il calcolo del punto precedente, la probabilità che ci sia una settimana senza pioggia è

$$\binom{4}{1} (e^{-2})^1\,(1-e^{-2})^3 \approx 0.35$$

3. Si vuole stimare la media μ di una popolazione mediante un campione di rango $n = 3$; viene proposta la famiglia di stimatori

$$\widehat{\mu}_\theta = \frac{X_1 + \theta\,X_2 + 2\,\theta\,X_3}{1 + 3\,\theta}$$

con $\theta \in [0,1]$. Verificare che si tratta di stimatori non distorti per qualunque $\theta \in [0,1]$ e determinare il valore di θ che fornisce lo stimatore più efficace.

Soluzione. Abbiamo

$$E[\widehat{\mu}_\theta] = \frac{\mu + 3\,\theta\,\mu}{1 + 3\,\theta} = \mu$$

Inoltre, con $\sigma^2 = Var(X_1)$,

$$Var(\widehat{\mu}_\theta) = \frac{1 + 5\,\theta^2}{(1 + 3\,\theta)^2}\sigma^2$$

$$\frac{d}{d\theta}\,Var(\widehat{\mu}_\theta) = \frac{20\,\theta^2 + 10\,\theta - 2}{(1 + 3\,\theta)^3}\sigma^2$$

Quest'ultima si annulla per

$$\theta_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{20}$$

Essendo $\theta_1 < 0$ e $0 < \theta_2 < 1$ il valore cercato è θ_2.