Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2021/2022
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 13 luglio 2022

1. Un vaccino per la prevenzione di una data malattia viene somministrato all'80 % di una popolazione. Con il vaccino la probabilità di contrarre la malattia è del 2 %, mentre è del 20 % senza il vaccino.

   (a) Qual è l'incidenza della malattia sulla popolazione (cioè la probabilità che una persona scelta a caso si ammali)?

   (b) Se un individuo scelto a caso non ha contratto la malattia, qualè la probabilità che sia vaccinato?

Soluzione. Definiamo gli eventi $V =$ "la persona è vaccinata, " $M =$"la persona è malata". Dai dati del problema abbiamo:

$$P(V) = 0.8, \quad P(\bar{E}) = 0.2, \quad P(M|V) = 0.02, \quad P(M|\bar{V}) = 0.2$$

(a) Usando il teorema delle probabilità totali:

$$P(M) = P(M|V)\,P(V) + P(M|\bar{V})\,P(\bar{V}) = 0.02 \times 0.8 + 0.2 \times 0.2 = 0.056$$

L'incidenza della malattia è dunque del 5.6 %.

(b) Usando la formula di Bayes:

$$P(V|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|V)\,P(V)}{P(\bar{M})} = \frac{[1 - P(M|V)]\,P(V)}{1 - P(M)} = \frac{0.98 \times 0.8}{0.944} = 0.83$$

2. Il tempo di attesa da un medico è rappresentato da una variabile casuale esponenziale di media 15 minuti (tanto? poco? fate voi ...). Qual è la probabilità che, su 5 pazienti, esattamente 2 debbano aspettare più di 20 minuti?

Soluzione. Sia X la variabile che indica il tempo di attesa. La legge di X è data da $f_X(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$ con funzione di ripartizione $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ e $\lambda = 1/15$. Quindi la probabilità che un paziente scelto a caso debba aspettare più di 20 minuti è data da

$$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-20/15} = e^{-4/3} = 0.2636 \equiv p$$

Sia ora Y la variabile che indica il numero di pazienti su 5 che devono aspettare più di 20 minuti. Abbiamo che $Y \sim B(5,p)$ e

$$P(Y=2) = B(5,p)(2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 0.2775$$

3. Un insieme di misurazioni della temperatura del mare in una determinata zona fornisce i seguenti dati, in gradi centigradi:

   27.2, 27.6 26.4 26.5 27.5 27.1 26.9 27.5 26.6 26.8

   Si sospetta che la forte concentrazione di un'alga nella zona in questione abbia l'effetto di alzare la temperatura rispetto al suo valore normale, che è di 26.8 gradi centigradi. Verificare tale ipotesi al livello del 95 %.

   Soluzione. Abbiamo:

$$\overline{X}_n = 27.01 \qquad S_n^2 = 0.192111 \qquad S_n = 0.438305$$

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} = \frac{27.01 - 26.8}{0.438305}\sqrt{10} = 1.51511$$

   da confrontare con il quantile di Student $t_9(0.05) = 1.833$. Il dato del campione non è quindi nella regione critica e l'ipotesi non è confermata.