Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2020/2021
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 11 novembre 2021

1. Una fabbrica produce circuiti stampati; sia p la frazione di schede difettose. Esprimere la probabilità che, su un campione di N schede, k siano difettose, usando sia la distribuzione binomiale che quella di Poisson. Posto, quindi, $N = 100$ e $k = 2$, confrontare i due valori (binomiale e Poisson) per $p = 0.01$ e 0.5, commentando i risultati.

Soluzione. Il numero di schede difettose segue la legge binomiale $B(N, p)$. Quindi, se indichiamo con X il numero di schede difettose su un campione di N, la probabilità che k siano difettose è data da

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k \, (1 - p)^{N-k}$$

Nel passaggio dalla distribuzione binomiale a quella di Poisson, dobbiamo porre $\lambda = N\,p$, e la probabilità diventa

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \, \frac{\lambda^k}{k!}$$

Nei due casi numerici, abbiamo $\lambda = 1$ e 50. Otteniamo con la binomiale::

$$P(X = 2) = \binom{100}{2} 0.01^2 \, 0.99^{98} = 0.185 \quad \text{per} \quad p = 0.01$$

$$P(X = 2) = \binom{100}{2} 0.5^2 \, 0.5^{98} = 3.9\, 10^{-27} \quad \text{per} \quad p = 0.5$$

mentre con Poisson

$$P(X = 2) = e^{-1} \, \frac{1^2}{2!} = 0.184 \quad \text{per} \quad p = 0.01$$

$$P(X = 2) = e^{-50} \, \frac{50^2}{2!} = 2.4\, 10^{-19} \quad \text{per} \quad p = 0.5$$

che fornisce un'approssimazione migliore quando $\lambda \sim 1$.

2. Siano X e Y due variabili aleatorie continue indipendenti con X uniforme su $[0, 1]$ ed Y esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Calcolare (a) $P(\{X \geq Y\})$ e (b) $P(\{Y \leq X^2/4\})$.

Soluzione. Le distribuzioni marginali sono date da

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 1, \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ &= 0 \;\; \text{altrimenti} \\ f_Y(y) &= \lambda \, e^{-\lambda\, y}, \;\; 0 \leq y < \infty \;\; \text{con} \;\; \lambda = 2 \\ &= 0 \;\; \text{altrimenti} \end{aligned}$$

Siccome X ed Y sono indipendenti, la densità congiunta è data da $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$.

(a) Sia D il dominio del piano (x,y) dove $\{X \geq Y\}$; abbiamo

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1\,;\ 0 \leq y \leq x\}$$

e

$$P(\{X \geq Y\}) = \int\int_D f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy\, \lambda\, e^{-\lambda\, y} =$$
$$= \int_0^1 dx\, (1 - e^{-\lambda\, x}) = 1 - \left[\frac{e^{-\lambda\, x}}{-\lambda}\right]_0^1 = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} = 1 - \frac{1 - e^{-2}}{2} = 0.57$$

(b) Sia ora D il dominio del piano (x,y) dove $\{Y \leq X^2/4\}$; abbiamo

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1\,;\ 0 \leq y \leq x^2/4\}$$

e

$$P(\{Y \leq X^2/4\}) = \int\int_D f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2/4} dy\, \lambda\, e^{-\lambda\, y} =$$
$$= \int_0^1 dx\, (1 - e^{-\lambda\, x^2/4}) = \int_0^1 dx\, (1 - e^{-x^2/2}) = 1 - \sqrt{2\,\pi}\, P(0 \leq Z \leq 1) =$$
$$1 - \sqrt{2\,\pi}\ [\Phi(1) - \Phi(0)] = 1 - \sqrt{2\,\pi}\ \left[\Phi(1) - \frac{1}{2}\right] \approx 0.602$$

dove Z è una normale standard.

3. Un giardiniere deve tagliare settimanalmente l'erba del prato con un rasaerba a batteria. Egli ha a disposizione 53 batterie, la cui durata è distribuita uniformemente nell'intervallo $[1/2, 1]$ (in ore; le durate delle batterie sono indipendenti). Supponendo che la durata complessiva settimanale del lavoro di rasatura sia di 1 ora e mezza e che l'operazione vada compiuta per 26 settimane calcolare, utilizzando l'approssimazione normale, la probabilità che le 53 batterie bastino a finire il lavoro.

Soluzione. Ricordiamo che per la distribuzione uniforme si ha $\mu = (a+b)/2 = 0.75$ e $\sigma^2 = (a-b)^2/12 \approx 0.02$. Sia ora X_j la durata (in ore) della $j-$esima batteria. Il quesito richiesto è $P(X_1 + ... + X_n \geq 26 \times 1.5)$ con $n = 53$. Con l'approssimazione normale abbiamo:

$$P(X_1 + ... + X_n \geq 39) = P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - n\,\mu}{\sqrt{53}\,\sigma} \geq \frac{39 - 39.75}{1.03}\right) =$$
$$= P(Z \geq -0.73) = \Phi(0.73) \approx 0.7673$$