Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2020/2021
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 luglio 2021

1. Si vuole stimare il consumo di carburante di un nuovo modello di automobile appena lanciato sul mercato. Un campione di 5 veicoli fornisce i seguenti dati in km/litro di carburante:

$$28.1 \quad 20.2 \quad 20.5 \quad 22.0 \quad 19.1$$

   (i) Calcolare gli intervalli di confidenza al 90%, al 95% e al 99%;

   (ii) eseguire un test d'ipotesi al 95% e al 99% contro l'affermazione della casa automobilistica per un consumo di non oltre 18.5 km/litro (*si scelga* $H_0 : \mu \leq \mu_0$).

Soluzione. Abbiamo: $n = 5$, $\overline{X}_n = 21.98$, $S^2 = 12.77$, $S = 3.57$.

(i) $t_{90}(4) = 2.132$, $t_{95}(4) = 2.776$, $t_{99}(4) = 4.604$; quindi gli intervalli di confidenza sono

$$\begin{array}{ll} [18.5719, 25.3881] & \text{al } 90\% \\ [17.5424, 26.4176] & \text{al } 95\% \\ [14.6202, 29.3398] & \text{al } 99\% \end{array}$$

(ii) $t_{95}(4) = 2.132$, $t_{99}(4) = 3.747$. La regione critica è 21.91 al 95% e 24.49 al 99%. L'ipotesi nulla viene quindi accettata al 99% e rigettata al 95%.

2. Un giocatore di scacchi partecipa ad un torneo dove incontra 10 avversari. I suoi avversari si dividono in due gruppi; il gruppo A contiene 6 giocatori del suo livello, contro i quali ha probabilità $p_A = 0.5$ di vincere, mentre il gruppo B contiene 4 avversari un pò più deboli, contro i quali ha probabilità $p_B = 0.7$ di vincere. Sia X la variabile casuale che rappresenta il numero totale di vittorie nel torneo, X_A il numero di vittorie contro gli avversari del gruppo A e X_B il numero di vittorie contro quelli del gruppo B.

   (a) Qual è la legge di X_A e di X_B?

   (b) Qual è la relazione tra X_A, X_B ed X?

   (c) Qual è la legge di X?

   (d) Qual è la probabilità che il giocatore vinca almeno 6 incontri?

Soluzione. Le variabili X_A e X_B hanno una distribuzione binomiale del tipo

(a) $X_A \sim B(6, p_A) = B(6, 0.5)$ e $X_B \sim B(4, p_B) = B(4, 0.7)$

(b) $X = X_A + X_B$ (non è binomiale);

(c) X può assumere tutti i valori interi da 0 a 10. Quindi, $P(X = n) = 0$ per $n < 0$ e $n > 10$. Poi:

$$\begin{aligned}
P(X=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_B = k)\, P(X_A = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (0.7)^k\, (0.3)^{n-k} \binom{n}{n-k} (0.5)^{n-k}\, (0.5)^k, \quad n < 4 \\
P(X=n) &= \sum_{k=0}^{4} P(X_B = k)\, P(X_A = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} (0.7)^k\, (0.3)^{n-k} \binom{n}{n-k} (0.5)^{n-k}\, (0.5)^k, \quad n \geq 4
\end{aligned}$$

(d) La probabilità cercata è

$$P(X \geq 6) = \sum_{n=6}^{10} P(X = n).$$

3. Due variabili casuali discrete indipendenti X e Y possono assumere i valori 1, 0 e -3 con probabilità

$$P(\{X=1\})=p, \qquad P(\{X=0\})=1/2$$
$$P(\{Y=1\})=3/8, \qquad P(\{Y=0\})=1/4.$$

(i) Calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$ e $Var(Y)$ in funzione di p;

(ii) per quale valore di p la varianza di X è minima? E per quale è massima?

(iii) dire, senza fare calcoli, quanto vale il coefficiente di correlazione e verificarlo con il calcolo esplicito.

Soluzione. Ovviamente abbiamo $P(\{X=-3\})=1/2-p$ e $P(\{Y=-3\})=3/8$; quindi

(i)

$$E[X] = p - 3\left(\frac{1}{2}-p\right) = 4\,p - \frac{3}{2}$$
$$E[Y] = \frac{3}{8}\,(1-3) = -\frac{3}{4}$$
$$E[X^2] = p + 9\left(\frac{1}{2}-p\right) = \frac{9}{2} - 8\,p$$
$$E[Y^2] = \frac{3}{8}\,(1+9) = \frac{15}{4}$$
$$Var(X) = \frac{9}{2} - 8\,p - \left(4\,p - \frac{3}{2}\right)^2 = -16\,p^2 + 4\,p + \frac{9}{4}$$
$$Var(Y) = \frac{15}{4} - \frac{9}{16} = \frac{51}{16}$$

(ii) La derivata di Var(X) è $4-32\,p$, che ha il massimo in $p=1/8$; la varianza è minima per $p=1/2$.

(iii) Deve essere $\rho=0$. La distribuzione congiunta è data dal prodotto delle marginali, quindi $P(X=i, Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$ per ogni i e j. Il prodotto $X\,Y$ può assumere i valori 1, -3, 9 e 0 con probabilità, rispettivamente, $3/8\,p$, $3/16$, $3/8\,(1/2-p)$ e $5/8$. Abbiamo quindi

$$E[X\,Y] = \frac{9}{8} - 3\,p \tag{1}$$
$$Cov(X,Y) = \frac{9}{8} - 3\,p + \left(4\,p - \frac{3}{2}\right)\frac{3}{4} = 3\,p - \frac{49}{72} = 0 \tag{2}$$