Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2020/2021
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 giugno 2021

1. In una classe, le studentesse sono il 40%; il 30% degli studenti porta gli occhiali; le studentesse con gli occhiali sono il 10% del totale. Se si sceglie uno studente a caso, qual è la probabilità che

   (i) sia una maschio, sapendo che porta gli occhiali?

   (ii) porta gli occhiali, sapendo che è maschio?

F : Studentesse M : studenti maschi

O : portano gli occhiali

$$P(F) = 0.4; \quad P(O) = 0.3; \quad P(O \cap F) = 0.1$$

(i) $$P(M|O) = 1 - P(F|O) = 1 - \frac{P(F \cap O)}{P(O)} =$$

$$= 1 - \frac{0.1}{0.3} = \frac{2}{3}$$

(ii) $P(O|M) = P(M|O)\,\dfrac{P(O)}{P(M)} =$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{3}$$

2. Siano X e Y due variabili aleatorie non negative la cui distribuzione congiunta è uniforme nel triangoloide di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (1, 1)$, il cui lato AC è dato dalla curva di equazione $y = \sqrt{x}$.

   (a) Determinare il valore della distribuzione nel dominio;

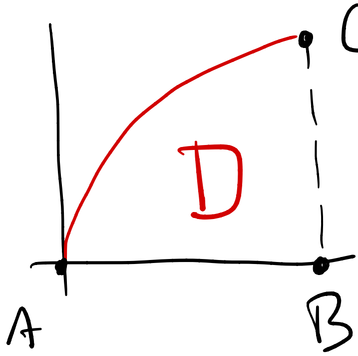
   (b) determinare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, specificando esplicitamente per entrambe l'intervallo di definizione;

   (c) verificare se X ed Y sono indipendenti;

   (d) determinare media e varianza di X e Y;

   (e) determinare il valor medio del prodotto XY;

   (f) determinare il coefficiente di correlazione di X e Y.



$y = \sqrt{x}$

(a) $f(x,y) = C$ $\quad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} C \, dx\, dy = 1$

$$1 = C \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = C\,\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}$$

$$f(x,y) = \frac{3}{2} \quad (x,y) \in D$$

$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

(b) $f_X(x) = \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy = \frac{3}{2}\sqrt{x}$; $0 \le x \le 1$

$f_Y(y) = \int_{y^2}^{1} f(x,y)\,dx = \frac{3}{2}(1-y^2)$; $0 \le y \le 1$

(c) $f(x,y) \neq f_X(x)\,f_Y(y)$ NON INDIPENDENTI

(d) $E[X] = \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$E[Y] = \int_0^1 y\,\frac{3}{2}(1-y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$

$E[X^2] = \int_0^1 x^2\,\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

$E[Y^2] = \int_0^1 y^2\,\frac{3}{2}(1-y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{3}{7} - \frac{9}{25} = \frac{12}{175}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{5} - \frac{9}{64} = \frac{19}{320}$$

(e) $$E[XY] = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} xy \, dx \, dy =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 x \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{4} \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{4}$$

(f) $$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y] =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4} - \frac{9}{40} = \frac{1}{40}$$

$$\rho = \frac{1/40}{\sqrt{12/175 \cdot 19/320}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{57}} \approx 0.39$$

3. Un lavoratore pendolare percorre quotidianamente il tragitto dalla sua abitazione al luogo di lavoro. Il tempo medio di percorrenza del tragitto è di 30 minuti, con una deviazione standard di 5 minuti. Nell'ipotesi che il tempo di percorrenza abbia distribuzione normale, si chiede:

   - qual è la probabilità che il tempo di percorrenza del tragitto sia di almeno 35 minuti?
   - se la fabbrica apre alle 9.00 e il lavoratore lascia quotidianamente l'abitazione alle 8.35, qual è la percentuale di volte in cui arriva in ritardo al lavoro?
   - si risponda alle due precedenti domande nel caso in cui il tempo di percorrenza abbia distribuzione uniforme con le stesse media e deviazione standard scritte sopra.

$X =$ tempo di percorrenza

<u>Legge Normale</u>:

$$Z = \frac{X - 30}{5}$$ variabile standardizzata

$$P(X > 35) = P(Z > 1) = 0.1587$$

$$P(X > 25) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0.8413$$

Distribuzione uniforme

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \le x \le b$$

$$= 0 \qquad \text{altrimenti}$$

Media : $E[X] = \dfrac{a+b}{2} = 30$

Varianza : $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = 25$

$$\begin{cases} a+b = 60 \\ (b-a)^2 = 12 \times 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} b+a = 60 \\ b-a = 5\sqrt{12} = 10\sqrt{3} \end{cases}$$

$$b = \frac{60+10\sqrt{3}}{2} = 30+5\sqrt{3} \simeq 38.66$$

$$a = \frac{60-10\sqrt{3}}{2} = 30-5\sqrt{3} \simeq 21.34$$

La distribuzione è questa

$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{3}} \simeq 0.058 \qquad a \leq x \leq b$$

$$= 0 \qquad \text{altrimenti}$$

$$P(X > 35) = \int_{35}^{b} f(x)\,dx = \int_{35}^{30+5\sqrt{3}} \frac{1}{10\sqrt{3}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{10\sqrt{3}} \left(5\sqrt{3} - 5\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.21$$

$$P(X > 25) = \int_{25}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{10\sqrt{3}} \left(5 + 5\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \simeq 0.79$$