Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2020/2021
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 aprile 2021

1. Un'urna contiene N_r palline rosse ed N_b palline bianche. Si sa che:

   (i) la probabilità di estrarre una pallina rossa è 5/12;

   (ii) se si estraggono due palline senza restituzione, la probabilità che la prima sia rossa se la seconda sia bianca è 3/7.

   Calcolare il numero di palline rosse e bianche presenti inizialmente nell'urna.

Siano R e B gli eventi

R = "estrazione pallina rossa"

B = " " " bianca"

Ed R_1, B_1, R_2, B_2 gli eventi

R_1 = "La prima estratta è rossa"

R_2 = "La seconda " "

ed analogamente per B_1 e B_2.

Dai dati del problema:

$$P(R) = \frac{5}{12} \equiv p \qquad (1)$$

$$P(R_1 | B_2) = \frac{3}{7} \equiv s \qquad (2)$$

Dalla (1) abbiamo subito

$$\frac{N_r}{N} = p \qquad (N = N_r + N_b)$$

Rielaborando la (2):

$$P(R_1 | B_2) \overset{(\text{Bayes})}{=} P(B_2 | R_1) \frac{P(R_1)}{P(B_2)} =$$

$$= \frac{N_b / (N-1) \cdot p}{P(B_2)}$$

Per $P(B_2)$ usiamo il teorema della probabilità totale:

$$P(B_2) = P(B_2|R_1)\,P(R_1) + P(B_2|B_1)\,P(B_1) =$$

$$= \frac{N_b}{N-1}\,\frac{N_r}{N} + \frac{N_b-1}{N-1}\,\frac{N_b}{N} =$$

$$= \frac{N_b\,\cancel{(N_r+N_b-1)}}{N\,\cancel{(N-1)}} = \frac{N_b}{N}$$

Quindi:

$$P(R_1|B_2) = \frac{N_b}{N-1}\,\frac{N}{N_b}\,p = \frac{N}{N-1}\,p = \frac{N_r}{N-1}$$

Abbiamo così il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{N_r}{N} = \dfrac{5}{12} \\[2ex] \dfrac{N_r}{N-1} = \dfrac{3}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{N-1}{N} = \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{7}{3} \\[2ex] N_r = \dfrac{5}{12} N \end{cases}$$

$$N-1 = \frac{35}{36} N \qquad N \cdot \frac{1}{36} = 1$$

$$N = 36 \qquad N_r = \frac{5}{12} \cdot 36 = 15$$

$$N_r = 15 \qquad N_b = 21$$

2. Un produttore di pneumatici garantisce le proprie gomme per almeno 40 mila chilometri di percorrenza. Un test d'ipotesi su un campione di 10 treni di gomme fornisce i seguenti dati, in migliaia di chilometri:

$$37 \quad 39.5 \quad 39.8 \quad 40.2 \quad 40. \quad 40.1 \quad 38. \quad 37.9 \quad 42. \quad 39.1$$

Stabilire con un test d'ipotesi unilaterale se i dati confermano o meno l'affermazione del produttore (presa come ipotesi nulla) al 10% e al 5%.

$n = 10 \qquad \bar{X}_n = 39.36$

$S^2 = 2.05156 \qquad S = 1.43233$

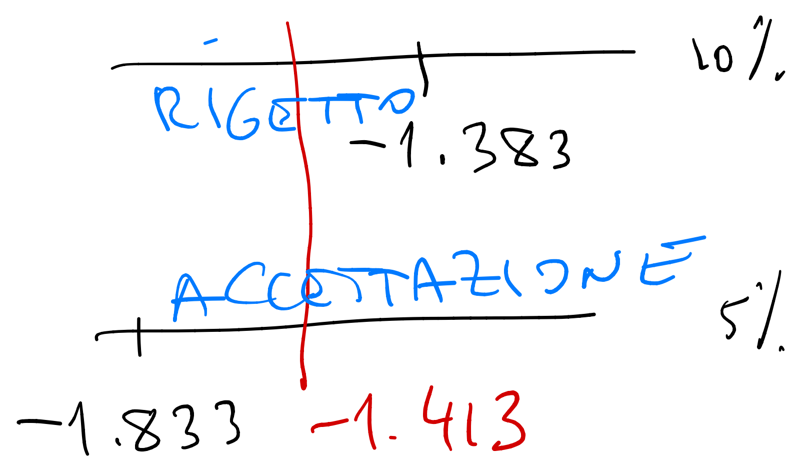
$\mu_0 = 40 \qquad H_0 : \mu \geq \mu_0$

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = -1.413$$

Regione critica

$t_9(10\%) = 1.383$

$t_9(5\%) = 1.833$



3. Sia X il numero di clienti di un concessionario in una giornata. Si supponga che X segua la legge di Poisson con parametro $\lambda = 3$. Inoltre, si sa che un cliente su 5 procede all'acquisto di una vettura, indipendentemente dagli altri clienti. Sia Y il numero di macchine vendute in un giorno. Per la risoluzione dell'esercizio può essere utile riconoscere che la densità condizionata di Y dato X possiede distribuzione binomiale, nel senso che:

$$f_{Y|X}(Y = l|X = k) = \mathrm{Bin}(k, p)(l)$$

con $p = 1/5$.

(i) Se il concessionario ha avuto esattamente 5 clienti in un determinato giorno, qual è la probabilità che abbia venduto esattamente 2 macchine?

(ii) Qual è il numero medio di macchine vendute in una giornata?

(iii) Qual è la probabilità che il concessionario non venda nessuna macchina in un dato giorno?

(iv) Se il concessionario non ha venduto macchine in un dato giorno, qual è la probabilità che non abbia avuto clienti?

$$f_{X,Y}(k,l) = \underbrace{f_{Y|X}(l|k)}_{\mathcal{B}\left(k,\, p=\frac{1}{5}\right)} \underbrace{f_X(k)}_{\mathrm{Poi}(\lambda=3)}$$

$$= \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$(i)\ P(Y=2|X=5) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3 =$$

$$\simeq 0.2048$$

Distribuzione $\left(p = \frac{1}{5}\ ;\ \lambda = 3\right)$

$$f_{XY}(k, \ell) = f_{Y|X}(\ell | k)\, f_X(k) =$$

$$= \binom{k}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{k-\ell}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \ell \leq k$$

$f_{XY}(k, \ell) = 0$ altrimenti.

$$f_Y(\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{XY}(k, \ell) =$$

$$= \sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{k-\ell} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$k' = k - \ell$ $$= e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{\infty} \binom{k'+\ell}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{k'} \frac{\lambda^{k'+\ell}}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} p^{\ell} \lambda^{\ell} \sum_{k'} \binom{k'+\ell}{\ell} (1-p)^{k'} \frac{\lambda^{k'}}{(k'+\ell)!} =$$

$$\binom{h'+\ell}{\ell}\frac{1}{(h'+\ell)!} = \frac{\cancel{(h'+\ell)!}}{\ell!\,h'!}\frac{1}{\cancel{(\;)}}$$

$$= \frac{1}{\ell!\,h'!}$$

$$= e^{-\lambda} p^{\ell} \lambda^{\ell} \sum_{h'=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{h'} \lambda^{h'}}{\ell!\,h'!} =$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^{\ell} \frac{p^{\ell}}{\ell!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^{\ell}}{\ell!}$$

Dunque Y è $\mathrm{Poi}(\lambda p) =$

$= \mathrm{Poi}(3/5)$

$$(ii)\quad E[Y] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \, f_Y(\ell) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \sum_{k=\ell}^{\infty} f_{Y|X}(\ell|k)\, f_X(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \ell \, f_{Y|X}(\ell|k)\, f_X(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} \ell \, \mathrm{Bin}(k,p)(\ell) =}_{\text{Valore atteso di una binomiale: } kp}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, kp = p \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \, f_X(k)}_{\text{Valore atteso di Poisson } \lambda}$$

$$E[Y] = p\lambda = \frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{3}{5}$$

(iii) $$P(Y=0) = f_Y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{XY}(k,0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}(k,p)(0)\, f_X(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4/5 \cdot \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\frac{4}{5}\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda/5} = e^{-3/5} \approx 0.55$$

(iv) $$P(X=0 \mid Y=0) \overset{\text{Bayes}}{=} P(Y=0 \mid X=0) \frac{P(X=0)}{P(Y=0)}$$

$$= \frac{1 \cdot e^{-\lambda}}{e^{-3/5}} = e^{-12/5} \approx 0.09$$