Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2020/2021
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 18 febbraio 2021

1. Un dispositivo elettronico è fatto da due componenti, A e B, collegati in parallelo e non indipendenti, così che il dispositivo non funziona solo se entrambi i componenti non funzionano. Sapendo che: il componente A ha probabilità 0.2 di guastarsi; il componente B è guasto con probabilità 0.8 se A è guasto e 0.4 se A è funzionante,

   (a) calcolare la probabilità che:

      (i) la probabilità che A sia guasto se lo è B;

      (ii) sia guasto uno ed uno solo dei due componenti.

   (b) Per migliorare l'affidabilità del dispositivo viene aggiunto un terzo componente C, sempre in parallelo, che ha probabilità 0.2 di guastarsi (indipendentemente dal funzionamento degli altri due). Sapendo che il dispositivo è funzionante, qual è la probabilità che C sia funzionante?

$A =$ "A è funzionante"

$B =$ "B " "

$C =$ "C " "

$P(A^c) = 0.2$ $\qquad P(A) = 0.8$

$P(B^c | A^c) = 0.8$ $\qquad P(B^c | A) = 0.4$

$$(e-i)\quad P(A^c|B^c) = \frac{P(B^c|A^c)\,P(A^c)}{P(B^c)} = \circledast$$

$$P(B^c) = P(B^c|A)\,P(A) + P(B^c|A^c)\,P(A^c) =$$

$$= 0.4 \times 0.8 + 0.8 \times 0.2 =$$

$$= 0.8 \times 0.6 = 0.48$$

$$\circledast = \frac{0.8 \times 0.2}{0.48} = 0{,}\overline{3}$$

$$(e-ii)\quad \underbrace{P(A^c \cap B)}_{= P(B|A^c)\,P(A^c)} + \underbrace{P(B^c \cap A)}_{P(B^c|A)\,P(A)} =$$

$$= P(B|A^c)\,P(A^c) + P(B^c|A)\,P(A) =$$

$$= \left(1 - P(B^c|A^c)\right)P(A^c) + P(B^c|A)\,P(A) =$$

$$= 0.2 \times 0.2 + 0.4 \times 0.8 = 0.04 + 0.32 = 0.36$$

(b) $P(C^c) = 0.2$

F = "il sistema con solo A e B funziona"

D = "il sistema funziona"

Si chiede $P(C \mid D)$

Vediamo prima

$$P(F^c) = P(A^c \cap B^c) = P(B^c \mid A^c)\,P(A^c) =$$
$$= 0.8 \times 0.2 = 0.16$$

$$P(F) = 0.84$$

$$P(D^c) = P(F^c \cap C^c) = P(F^c)\,P(C^c) =$$
$$= 0.16 \times 0.2 = 0.032$$

$$P(D) = 0.968$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)\,P(C)}{P(D)} = \frac{P(C)}{P(D)} =$$

$$= \frac{0.8}{0.968} = 0.83$$

2. Sia X la variabile che rappresenta un numero a caso nell'intervallo $(0,1)$ e Y la variabile che rappresenta un numero a caso in $(0,X]$ e sia

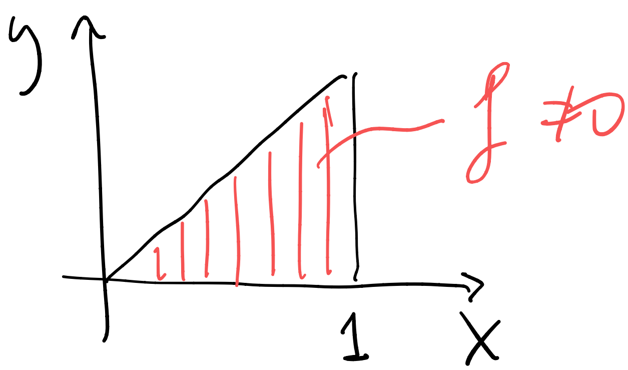
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x}, \quad \text{se} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y \leq x$$

e $f_{X,Y}(x,y) = 0$ altrimenti.

(a) Dimostrare che
$$E[X^r\,Y^s] = \frac{1}{(s+1)(r+s+1)},$$
con $r,\ s \in \mathbb{N}$;

(b) calcolare media e varianza di X e Y usando la relazione precedente;

(c) calcolare il coefficiente di correlazione di X e Y usando la relazione precedente.



(a)

$$E[X^r Y^s] = \int_0^1 dx \int_0^x dy\, \frac{1}{x}\, x^r y^s =$$

$$= \int_0^1 dx\, x^{r-1} \frac{y^{s+1}}{s+1}\Big|_0^x = \int_0^1 dx\, \frac{x^{r-1}\, x^{s+1}}{s+1} =$$

$$= \int_0^1 dx\, \frac{x^{r+s}}{s+1} = \frac{1}{(s+1)(r+s+1)}$$

(b) $E[X] = E[X^r Y^s]$ per $r=1$ e $s=0$

$$E[X] = \frac{1}{2}$$

$E[Y] = E[X^r Y^s]$ per $r=0$ e $s=1$

$$E[Y] = \frac{1}{4}$$

$$E[X^2] = \frac{1}{3} \qquad E[Y^2] = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$$

(c) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] =$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$$\rho = \frac{1/24}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{7}{144}}} = \frac{1}{24}\sqrt{\frac{144 \cdot 12}{7}} =$$

$$= \frac{1}{24} \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0.65$$

3. Il numero di telefonate al minuto che giungono ad un centralino è rappresentato da una variabile di Poisson di parametro λ. Si sa inoltre che la probabilità di ricevere esattamente una chiamata in un periodo di un minuto è il triplo della probabilità di non ricevere nessuna chiamata (in quel minuto). Si consideri ora una sequenza di $n = 100$ intervalli consecutivi di un minuto. Sia inoltre Y la variabile che indica il numero di intervalli in cui non è stata ricevuta alcuna telefonata. Si chiede di:

   (i) calcolare il valore di λ;

   (ii) scrivere l'espressione esatta della probabilità che in esattamente 5 intervalli non ci sia stata alcuna telefonata ed eseguirne il calcolo se possibile;

   (iii) calcolare la probabilità del punto precedente usando l'approssimazione normale con la correzione di continuità;

   (iv) calcolare approssimativamente la probabilità

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 3.1\right).$$

   usando il teorema del limite centrale senza usare la correzione di continuità.

$X =$ "numero telefonate al minuto"

$X \sim Poi(\lambda)$; $P(X=1) = 3P(X=0)$

$Y \sim B(n, p)$ con $n = 100$ e $p = e^{-\lambda} \simeq 0.05$

(i) $e^{-\lambda}\lambda = 3e^{-\lambda} \Longrightarrow \boxed{\lambda = 3}$

(ii) $P(Y=5) = \binom{n}{5} p^5 (1-p)^{n-5} = 0.18$

(iii)

$$P(Y=5) \approx P(4.5 < Y < 5.5) =$$

$$= P\left(\frac{4.5-\mu_Y}{\sigma_Y} < Z < \frac{5.5-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = *$$

$$\mu_Y = E[Y] = np = 5$$

$$\sigma_Y^2 = np(1-p) = 5 \times 0.95 = 4.75$$

$$\sigma_Y = \sqrt{4.75} \simeq 2.18$$

$$* = P\left(\frac{-0.5}{2.18} < Z < \frac{0.5}{2.18}\right) =$$

$$= P(|Z| < 0.23) = 2\Phi(0.23) - 1 =$$

$$= 2 \times 0.5910 - 1 = 0.182$$

(iv) Teorema del limite centrale:

$$S_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to Z \sim N(0,1)$$

dove $\bar{X}_n = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$

$$\mu = E[X_i] = E[X] = \lambda = 3$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3}$$

$$P(\bar{X}_n \geq 3.1) = P\left(Z \geq \frac{3.1 - 3}{\sqrt{3/100}}\right) =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{0.1 \times 10}{\sqrt{3}}\right) = P(Z \geq 0.577) =$$

$$= 1 - \Phi(0.577) = 1 - 0.7190 = 0.2810$$