Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2020/2021
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 gennaio 2021

Svolgere gli esercizi 1,2, 3 e, a scelta, il 4 o il 5.

1. Due strade della stessa portata, A e B, confluiscono in una terza strada di portata maggiore, C. Si sa che, nell'ora di punta, un ingorgo si forma nella strada A con probabilità 0.1 e nella strada B con probabilità 0.3; inoltre, una volta su tre, quando si presenta un ingorgo nella strada B c'è l'ingorgo anche in A.

   Calcolare la probabilità che:

   (i) entrambe le strade A e B siano intasate;

   (ii) B sia intasata se lo è A;

   (iii) sia intasata almeno una delle due strade;

   (iv) nessuna delle due strade sia intasata.

   Si sa inoltre che C è intasata

   - con probabilità 1 se entrambe le strade A e B sono intasate;
   - con probabilità 0.15 se B è intasata;
   - con probabilità 0.1 se ne' A ne' B sono intasate.

   Calcolare la probabilità che:

   (i) C sia intasata;

   (ii) A sia intasata se lo è C.

Eventi: $A =$ "A intesata"

$B =$ "B intesata"

$C =$ "C intesata"

Dati: $P(A) = 0.1$ $\quad P(B) = 0.3$

$P(A|B) = \frac{1}{3}$

(i) $P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = 0.1$

(ii) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= 0.3$

(iv) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.7$

Ulteriori dati: $P(C|A\cap B)=1$

$P(C|B)=0.15 \quad P(C|\overline{A\cup B})=0.1$

Attenzione:

$$P(B|A)=1 \implies P(A\cap B)=P(A)$$

$$\text{e} \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=P(B)$$

(i) $P(C)=P(C|A\cup B)P(A\cup B)+$
$$+P(A|\overline{A\cup B})P(\overline{A\cup B})=$$
$$=P(C|B)P(B)+0.1\times 0.7=$$
$$=0.15\times 0.3+0.1\times 0.7=0.115$$

(ii) $P(A|C) = P(C|A)\dfrac{P(A)}{P(C)} =$

$$= P(C|A\cap B)\frac{0.1}{0.115} = \frac{0.1}{0.115} = 0.87$$

2. La tabella seguente riporta i valori della densità congiunta $p_{X,Y}(x,y)$ di due variabili casuali discrete X e Y:

			X	
		0	1	2
	-1 :	1/9	0	1/9
Y	0 :	2/9	0	2/9
	1 :	0	1/3	0

(i) Determinare le densità marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$;

(ii) dire se X e Y sono indipendenti e perchè;

(iii) determinare le densità condizionate $p_{Y|X}(y|X=1)$ e $p_{Y|X}(y|X \leq 1)$;

(iv) calcolare media e varianza di X e di Y;

(v) calcolare il coefficiente di correlazione di X e di Y.

$Y \backslash X$	0	1	2	p_Y
-1	$1/9$	0	$1/9$	$2/9$
0	$2/9$	0	$2/9$	$4/9$
1	0	$1/3$	0	$1/3$
p_X	$1/3$	$1/3$	$1/3$	

(i) $p_X(0) = p_X(1) = p_X(2) = \frac{1}{3}$

$p_Y(-1) = 2/9 \qquad p_Y(0) = 4/9 \qquad p_Y(1) = 1/3$

(ii) Non indip. $\left(p_X(x)\, p_Y(y) \neq p_{XY}(x,y) \right)$

(iii) $p_{Y|X}(y \mid x=1) = \dfrac{p_{X,Y}(y, x=1)}{p_X(1)}$

$p_{Y|X}(-1|1) = p_{Y|X}(0|1) = 0 \qquad p_{Y|X}(1,1) = 1$

$$p_{Y|X}(y \mid X \leq 1) = \frac{P_{X,Y}\left(\{Y=y\} \wedge \{X \leq 1\}\right)}{P(\{X \leq 1\})} =$$

$$= \frac{p_{X,Y}(y,0) + p_{X,Y}(y,1)}{p_X(0) + p_X(1)} =$$

$$= \frac{p_{X,Y}(y,0) + p_{X,Y}(y,1)}{2/3}$$

$$p_{Y|X}(-1 \mid X \leq 1) = \frac{1/9}{2/3} = \frac{1}{6}$$

$$p_{Y|X}(0 \mid X \leq 1) = \frac{2/9}{2/3} = \frac{1}{3}$$

$$p_{Y|X}(1 \mid X \leq 1) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

(iv) $\mathbb{E}[X] = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$$\mathbb{E}[Y] = -\frac{2}{9} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

$\mathrm{Var}(X) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\mathrm{Var}(Y) = \frac{5}{9} - \frac{1}{81} = \frac{44}{81}$

(v) $XY \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ con probabilità

$\frac{1}{9}, 0, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}, 0$ $\quad \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \frac{1}{9}$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \rho = 0$$

3. Il numero di incidenti per anno subiti da un certo automobilista rappresentato da una variabile di Poisson di parametro $\alpha = 2$. Il costo di ciascuna riparazione in migliaia di euro è a sua volta rappresentato da una variabile esponenziale di parametro $\lambda = 1/2$. Usando il teorema del limite centrale calcolare le probabilità che

   (i) nei prossimi 10 anni l'automobilista subisca almeno 15 incidenti;

   (ii) il costo complessivo delle riparazioni nei prossimi 15 incidenti non superi i 25000 euro.

(e) In 10 anni il numero di incidenti segue Poisson con $\alpha = 2 \times 10 = 20$. Quindi, ricordando che, per Poisson,

$E[X] = Var(X) = \alpha = 20$, abbiamo

$$P(X \geq 15) = P\left(\frac{X-20}{\sqrt{20}} \geq \frac{15-20}{\sqrt{20}} \right) =$$

$$= P(Z \geq -1.12) \approx 1 - \Phi(-1.12) =$$

$$= \Phi(1.12) = 0.8686$$

(b) Costo i-esima riparazione Y_i

$$Y_i \sim \exp\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$$

Ricordiamo che, per l'esponenziale,

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 2 \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 4$$

$$P(Y_1 + \dots + Y_{15} \leq 25) = P\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_{15} - 30}{\sqrt{15 \cdot 4}} \leq \frac{25 - 30}{2\sqrt{15}}\right) = P(Z \leq -0.65) \approx$$

$$\approx \Phi(-0.65) = 1 - \Phi(0.65) =$$

$$= 1 - 0.7422 = 0.2578$$

4. Si vuole stimare la resistenza di un dato semiconduttore. Le misure condotte su un campione di $n = 81$ pezzi forniscono una media campionaria $\overline{X}_n = 1.2$ Ohm con una varianza campionaria di $S_n^2 = 0.4$ Ohm^2. Determinare gli intervalli di confidenza al 90%, 95% e 99%.

$n = 81$ $\quad \overline{X}_n = 1.2$

$S_n^2 = 0.4$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$ per il 90%

$= 1.960$ per il 95%

$= 2.576$ per il 99%

$$\left(X_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , X_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \left(1.2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{0.4}{81}} , 1.2 + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{0.4}{81}} \right)$$

$(1.08, 1.32)$

$(1.0\cancel{6}, 1.34)$

$(1.02, 1.38)$

Per $n = 81$ si usa la Normale

5. Un produttore di elettrodomestici sostiene che un aspirapolvere di sua produzione consuma in media 46 kilowattora all'anno. Si vuole testare tale ipotesi contro l'ipotesi alternativa che il consumo sia minore (cioè $H_0 : \mu = \mu_0 = 46$ e $H_1 : \mu < \mu_0$). Un campione di rango $n = 12$ fornisce i valori $\overline{X}_n = 42$ e $S_n = 11.9$ (in kilowattore).

   (i) Quale conclusione si può trarre da questi dati con un livello di significatività del 5%? Ed al 10%?

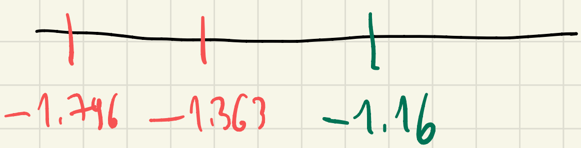
   (ii) Se avessimo ottenuto $\overline{X}_n = 50$, ed avessimo adottato $H_1 : \mu > \mu_0$ come ipotesi alternativa, quale sarebbe stata la conclusione?

$\mu_0 = 46 \qquad n = 12 \qquad \bar{X}_n = 42 \qquad S_n = 11.9$

$t_\alpha(11) = 1.363 \qquad 10\%$

$\qquad\quad\;\; = 1.796 \qquad 5\%$

(a) $$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{-4}{11.9/\sqrt{12}} = -1.16$$



Si accetta H_0

(b) $\bar{X}_n = 50$ $$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{4}{11.9/\sqrt{12}} = 1.16$$

Anche accettazione di H_0