Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2019/2020
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Modalità teledidattica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 11 giugno 2020

1. Un'urna (A) contiene 10 palline rosse e 6 bianche. Una seconda urna (B) contiene quattro nomi, Lucia, Maria, Andrea e Renato. Una terza (C) urna contiene 3 nomi, Giuseppe, Francesca e Chiara. Si estraggono due palline senza restituzione dall'urna (A). Se la seconda estratta è rossa, si estrae a un nome dall'urna (B), se la seconda estratta è bianca si estrae a un nome dall'urna (C).

   - Qual è la probabilità che il nome estratto alla fine sia Maria?
   - Se il nome estratto alla fine è Giuseppe, qual è la probabilità che la prima pallina estratta dall'urna (A) fosse bianca?

Soluzione. Introduciamo gli eventi:

$R1$: "la prima pallina estratta è rossa";
$B1$: "la prima pallina estratta è bianca";
$R2$: "la seconda pallina estratta è rossa";
$B2$: "la seconda pallina estratta è bianca";
M: la persona estratta è Maria;
G: la persona estratta è Giuseppe.

Calcoliamo preliminarmente

$$P(R2) = P(R2|R1)\,P(R1) + P(R2|B1)\,P(B1) = \frac{9}{15}\,\frac{10}{16} + \frac{10}{15}\,\frac{6}{16} = \frac{5}{8}$$
$$P(B2) = 1 - P(R2) = \frac{3}{8}$$

- abbiamo che $P(M) = P(M|R2)\,P(R2) + P(M|B2)\,P(B2)$. Ma $P(M|B2) = 0$; quindi

$$P(M) = \frac{1}{4}\,\frac{5}{8} = \frac{5}{32}$$

- Si chiede la probabilità condizionata $P(B1|G)$. Abbiamo, usando la formula di Bayes,

$$P(B1|G) = \frac{P(G|B1)\,P(B1)}{P(G)} = \frac{P(G|B1)}{P(G)}\,\frac{6}{16} = \frac{3}{8}\,\frac{P(G|B1)}{P(G)}.$$

  Ma

$$P(G) = P(G|B2)\,P(B2) = \frac{1}{3}\,\frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$
$$P(G|B1) = \frac{1}{3}\,P(B2|B1) = \frac{1}{3}\,\frac{5}{15} = \frac{1}{9}$$

e quindi

$$P(B1|G) = \frac{3}{8}\,\frac{1/9}{1/8} = \frac{1}{3}$$

2. Un giardiniere deve tagliare l'erba del prato con un rasaerba a batteria. Egli ha a disposizione due batterie, la cui durata è distribuita uniformemente nell'intervallo $[1/2, 1]$ (in ore). Supponendo che la durata complessiva del lavoro di rasatura sia di 1 ora e mezza, qual è la probabilità di finire il lavoro, se le durate delle due batterie sono indipendenti?

Soluzione. Indichiamo con X la durata della prima batteria (in ore) e con Y la durata della seconda batteria. La probabilità richiesta è

$$P(X+Y > 3/2) = \int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$$

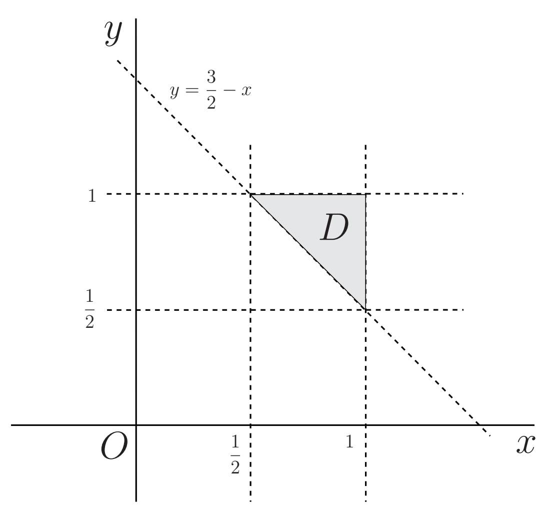
dove $f(x,y)$ è la densità congiunta di X e Y e $D \subset \mathbb{R}^2$ è il dominio dove $x+y > 3/2$ e $f(x,y) \neq 0$. Le variabili X e Y seguono la legge

$$f_X(x) = 2, \quad , 1/2 \leq x \leq 1; \qquad f_Y(y) = 2, \quad , 1/2 \leq y \leq 1$$

ed $f_X(x) = f_Y(y) = 0$ altrimenti. Siccome X ed Y sono indipendenti abbiamo

$$f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) = 4, \qquad 1/2 \leq x \leq 1, \quad 1/2 \leq y \leq 1$$

e $f(x,y) = 0$ altrimenti. Il dominio D è dato quindi da (vedi figura)



$$D = \{(x,y) : 1/2 \leq x \leq 1, \quad 3/2 - x \leq y \leq 1\}$$

In conclusione:

$$P(X+Y > 3/2) = \int_0^1 \left\{ \int_{1/2}^{3/2-x} 4\,dy \right\} dx = 4 \int_0^1 (1-x)\;dx = \frac{1}{2}$$

3. La distribuzione congiunta di due variabili X e Y è data da

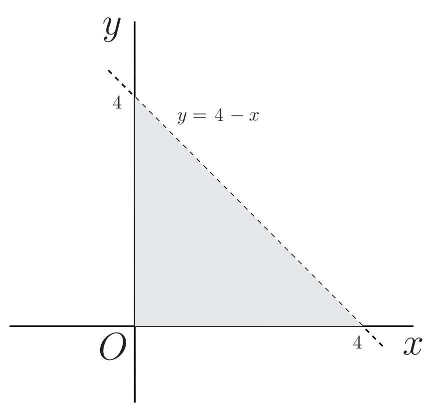
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} C & x > 0,\ y > 0,\ 0 \le x + y \le 4 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Determinare il valore di C;
- calcolare le densità marginali;
- X e Y sono indipendenti? Perchè?
- calcolare il coefficiente di correlazione di X e Y.

Soluzione. Il dominio D dove $f(x,y) \neq 0$ è dato da

$$D = \{(x,y) : x > 0, \quad y > 0, \quad 0 < y \le 4 - x\}$$

ed è riportato in figura.



- Il valore di C è determinato dalla condizione di normalizzazione: $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = 1$, cioè

  $$1 = \int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = C\,||D|| = 8\,C$$

  da cui $C = 1/8$.
-
  $$f_X(x) = \int_0^{4-x} f(x,y)\,dy = \frac{4-x}{8} \quad x \in [0,4]$$
  $$f_Y(y) = \int_0^{4-y} f(x,y)\,dx = \frac{4-y}{8} \quad y \in [0,4];$$
- X e Y non sono indipendenti, in quanto $f(x,y) \neq f_X(x)\,f_Y(y)$;
- Il coefficiente di correlazione ρ è dato da

  $$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}$$

per il cui calcolo abbiamo bisogno dei valori di aspettazione e varianze delle due variabili e della loro covarianza.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^4 x\, f_X(x)\, dx = \int_0^4 x\, \frac{4-x}{8}\, dx = \frac{4}{3} \\
E[X^2] &= \int_0^4 x^2\, f_X(x)\, dx = \int_0^4 x^2\, \frac{4-x}{8}\, dx = \frac{8}{3} \\
E[X\,Y] &= \int_0^4 \left\{ \int_0^{4-x} x\, y\, dy \right\} dx = \int_0^4 x \left\{ \int_0^{4-x} y\, dy \right\} dx = \frac{4}{3} \\
Var(X) &= E[X]^2 - E[X^2] = \frac{8}{9}
\end{aligned}
$$

Si vede facilmente che $E[Y] = E[X]$ e $Var(Y) = Var(X)$. Quindi

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E[X\,Y] - E[X]\,E[Y] = -\frac{4}{9} \\
\rho &= \frac{-4/9}{8/9} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

4. Una macchina con il serbatoio pieno ha un'autonomia di 800 km. Il numero di km giornalieri percorsi è una variabile casuale di media 50 e deviazione standard 20 km. Utilizzando l'approssimazione normale, calcolare la probabilità che la benzina basti per 18 giorni.

Soluzione. Indichiamo con X_1, X_2, ..., X_n, con $n = 18$, il consumo di benzina giornaliero nei 18 giorni considerati. Si chiede di calcolare $P(X_1 + X_2 + ... + X_n \leq 800)$. Standardizzando abbiamo:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 + ... + X_n \leq 800) &= P\left(\frac{\overline{X}_{18} - 50}{20/\sqrt{18}} \leq \frac{800 - 900}{20/\sqrt{18}} \right) \approx P\left(Z \leq -\frac{5}{3\sqrt{2}} \right) = \\
&= P(Z \leq -1.1785) = 1 - P(Z \leq 1.1785) = 1 - 0.8810 = 0.1190
\end{aligned}
$$

cioè 11.9%.