Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2019/2020
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 18 febbraio 2020

1. In uno studio medico, che osserva l'orario di apertura 9-17 (8 ore), arrivano mediamente 10 pazienti all'ora. Di questi, si sa che mediamente il 10 % arriva con febbre. Lo studio medico non riesce però a smaltire più di 10 pazienti con febbre in una giornata lavorativa. Sia ora X la variabile che rappresenta il numero totale di pazienti che entrano nello studio medico all'ora, Y la variabile che rappresenta il numero di pazienti con febbre in una giornata e infine Z la variabile che rappresenta il numero di pazienti con febbre visitati dal medico in una giornata.

   (a) Scrivere esplicitamente le leggi di X e Y;

   (b) quali valori può assumere Z e qual è la sua legge?

   (c) se un paziente con febbre arriva nello studio alle 15, qual è la probabilità che non venga visitato ?

   Nota: il calcolo numerico dell'ultimo punto con una normale calcolatrice potrebbe essere lungo; fornire quindi la risposta simbolica e posporre il calcolo alla fine se avanza tempo.

Soluzione.

(a) X è una variabile di Poisson di parametro $\lambda_X = 10$ quindi

$$p_X(k) = e^{-\lambda_X} \frac{\lambda_X^k}{k!} = e^{-10} \frac{10^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Y è pure una variabile di Poisson di parametro $\lambda_Y = 0.1 \times 80 = 8$ quindi

$$p_Y(k) = e^{-\lambda_Y} \frac{\lambda_Y^k}{k!} = e^{-8} \frac{8^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Z può assumere valori interi da $Z = 0$ a $Z = 10$. La sua densità è data da

$$P(Z = k) = P(Y = k) = e^{-8} \frac{8^k}{k!}, \qquad 0 \le k \le 9$$

$$P(Z = 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} P(Z = k) = 1 - \sum_{k=0}^{9} e^{-8} \frac{8^k}{k!}$$

(c) Indichiamo con W la variabile che segna il numero di pazienti con febbre in 6 ore. Questa segue una legge di Poisson di parametro $8 \times 3/4 = 6$ fino a 9 pazienti; quindi

$$P(W = k) = e^{-6} \frac{6^k}{k!}, \qquad 0 \le k \le 9$$

$$P(W = 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} P(W = k) = 1 - \sum_{k=0}^{9} e^{-6} \frac{6^k}{k!} \approx 0.084$$

cioè 8.4%

2. (8 punti) Un sondaggio elettorale fornisce i seguenti dati: il 35% dichiara che voterebbe per il partito A, il 35% per il partito B ed il rimanente 30% per il partito C. Si sa inoltre che il 50 % degli elettori del partito A, il 30 % degli elettori del partito B e il 10 % del partito C è laureato. Si chiede:

   (i) Qual'è la percentuale totale di elettori (entrati nel sondaggio) che ha la laurea?

   (ii) Se si sceglie un elettore a caso e si sa che ha la laurea, qual è la probabilità che sia un elettore del partito B?

Soluzione. Indichiamo con $P(A) = 0.35$ la probabilità che un elettore sia del partito A, ed analogamente per $P(B) = 0.35$ e $P(C) = 0.3$. Sia $P(L|A) = 0.5$ la probabilità che un elettore del partito A abbia la laurea, ed analogamente per $P(L|B) = 0.3$ e $P(L|C) = 0.1$.

(i) Applicando il teorema delle probabilità totali, la probabilità richiesta è

$$P(L) = P(L|A)\,P(A) + P(L|B)\,P(B) + P(L|C)\,P(C) = 0.31$$

(ii) Applicando la formula di Bayes, la probabilità richiesta è

$$P(B|L) = \frac{P(L|B)\,P(B)}{P(L)} = 0.34$$

3. Un negozio di abbigliamento vuole determinare l'età media dei suoi clienti. Un campione di 7 intervistati offre i seguenti dati:

$$20 \quad 22 \quad 30 \quad 18 \quad 19 \quad 21 \quad 32$$

Determinare gli intervalli di confidenza per l'età media al 99%, 95% e 90%.

Soluzione. Media campionaria $\overline{X}_n = 23.14$, varianza campionaria $S_n^2 = 30.81$ con $n = 7$. Dalle tavole di Student abbiamo $t_{0.05}(6) = 1.943$ (per l'intervallo al 90%), $t_{0.025}(6) = 2.447$ (per l'intervallo al 95%) e $t_{0.005}(6) = 3.707$ (per l'intervallo al 99%). Gli intervalli sono quindi:

$$[\overline{X}_n - 1.943\sqrt{\frac{30.81}{7}}, \overline{X}_n + 1.943\sqrt{\frac{30.81}{7}}] = [19.07, 27.22], \quad 90\%$$

$$[\overline{X}_n - 2.447\sqrt{\frac{30.81}{7}}, \overline{X}_n + 2.447\sqrt{\frac{30.81}{7}}] = [18.01, 28.28], \quad 95\%$$

$$[\overline{X}_n - 3.707\sqrt{\frac{30.81}{7}}, \overline{X}_n + 3.707\sqrt{\frac{30.81}{7}}] = [15.37, 30.92], \quad 99\%$$