Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2015/2016
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 30 gennaio 2020

1. Fornire gli intervalli di confidenza al 90%, 95 % e 99 % per la media del reddito annuo pro-capite di una certa popolazione sulla base del seguente campione di rango 10 (in migliaia di euro):

   32.0, 18.9, 21.8, 23.1, 18.0, 16.0, 26.2, 18.4, 19.0, 25.0

   Soluzione. Il campione ha media campionaria $\overline{X}_n = 21.8$, varianza campionaria $S_n^2 = 23.5$ e scarto quadratico medio $S_n = 4.8$ (dopo arrotondamento ad una cifra significativa). Dalle tabelle di Student abbiamo

   $$t_{\alpha/2}(9) = 1.833, \quad 2.262, \quad 3.250$$

   per i livelli di confidenza indicati. Gli intervalli sono pertanto

   $$\left[\overline{X}_n - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(9), \overline{X}_n + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(9)\right] =$$
   $$[18.99, 24.61]$$
   $$[18.33, 25.27]$$
   $$[16.82, 26.78]$$

2. Una fiera vede un'affluenza media giornaliera di 1000 visitatori, distribuiti secondo una legge di Poisson. Per incrementare il numero di visite, gli organizzatori si rivolgono a una agenzia pubblicitaria specializzata che, dall'esperienza passata, riesce ad aumentare la media di un fattore 1.5 nell' 80% dei casi (mentre è ininfluente nel restante 20 %). Nella giornata successiva alla fine della campagna pubblicitaria, gli organizzatori rilevano una presenza di 1230 visitatori. Qual è la probabilità che l'aumento sia dovuto alla campagna pubblicitaria?

   Soluzione. Sia X la variabile casuale che rappresenta il numero di visitatori in una particolare giornata. Tale variabile possiede una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_N = 1000$ in assenza della campagna pubblicitaria (o con campagna ininfluente) e $\lambda_E = 1500$ con una campagna efficace. Indichiamo con E e N gli eventi

$$E = \text{“la campagna pubblicitaria è stata efficace”}$$
$$N = \text{“la campagna pubblicitaria non è stata efficace”}.$$

Abbiamo allora $P(E) = 0.8$ e $P(N) = 0.2$. La domanda del problema si traduce nel calcolo della probabilità condizionata $P(E|X = 1230)$, che eseguiamo con l'ausilio della formula di Bayes e del teorema delle probabilità totali.

$$P(E|X = 1230) = \frac{P(X = 1230|E)\, P(E)}{P(X = 1230)}$$

Calcoliamo separatamente i vari pezzi, tenendo presente che $k = 1230$.

$$\begin{aligned}
&P(X = k|E) = e^{-\lambda_E}\, \frac{\lambda_E^k}{k!} \\
&P(X = k) = P(X = k|E)\, P(E) + P(X = k|N)\, P(N) = \\
&\quad = e^{-\lambda_E}\, \frac{\lambda_E^k}{k!} \times 0.8 + e^{-\lambda_N}\, \frac{\lambda_N^k}{k!} \times 0.2 = \frac{\lambda_E\, e^{-\lambda_E}}{k!} \left[0.8 + 0.2 \times \frac{\lambda_N^k}{\lambda_E^k}\, e^{\lambda_E - \lambda_N}\right]
\end{aligned}$$

E quindi

$$P(E|X = 1230) = \frac{0.8}{0.8 + 0.2 \times \frac{\lambda_N^k}{\lambda_E^k}\, e^{\lambda_E - \lambda_N}} \approx 0.53$$

3. Il territorio di una nazione viene diviso in tre regioni, Nord, Centro e Sud. Siano n_1, n_2 ed n_3 gli abitanti di ciascuna regione (Nord = 1, Centro = 2, Sud = 3). Si sceglie quindi una persona a caso e si denota con X il numero totale di abitanti della sua regione di appartenenza. Si sceglie, poi, indipendentemente e a caso, una delle tre regioni e si denota con Y il numero totale di abitanti quella regione.

   (i) Qualè la distribuzione di probabilità di X e di Y?

   (ii) Qualè il valore di aspettazione di X e di Y?

   (iii) Rispondere alle domande precedenti nel caso in cui gli abitanti in totale siano 10 milioni e le tre regioni contino rispettivamente 4, 3.5 e 2.5 milioni di abitanti.

Soluzione.

(i) Le due variabili casuali X e Y sono discrete e possono assumere gli stessi valori, $\{n_1, n_2, n_3\}$, con probabilità $p_X(n_i) = n_i/N$ e $p_Y(n_i) = 1/3$, $i = 1, 2, 3$.

(ii) $E[X] = \sum_{i=1}^3 n_i\, p_X(n_i) = \sum_{i=1}^3 (n_i^2)/N$; $E[Y] = \sum_{i=1}^3 n_i\, p_Y(n_i) = \sum_{i=1}^3 (n_i)/3 = N/3$.

(iii) $p_X(n_1) = 4/10 = 0.4$, $p_X(n_2) = 3.5/10 = 0.35$, $p_X(n_3) = 2.5/10 = 0.25$; dunque $E[X] = 3.45$ milioni e $E[Y] = 10/3 \approx 3.33$ milioni.

4. II numero di visite a domicilio praticate da un medico di base segue una distribuzione di Poisson con media di 6 al giorno (giornata di 8 ore).

   (i) Qual'è la probabilità che il medico effettui almeno 2 visite dalle 8.00 alle 12.00?

   (ii) Assumendo che l'evento del punto *(i)* si verifichi, qual'è la probabilità che dalle dalle 8.00 alle 14.00 vi siano almeno 4 visite?

Soluzione. Sia X il numero di visite in un giorno. Allora X è distribuita secondo

$$\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

con $\lambda = 6$.

(i) Il numero di visite in 4 ore, che indichiamo con Y, avrà ancora una distribuzione di Poisson con $\lambda_Y = 6/2 = 3$. Avremo allora

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{3^k\, e^{-3}}{k!} = 0.8 \end{aligned}$$

(ii) Dobbiamo considerare il numero di visite, W, in 6 ore, che segue la distribuzione di Poisson con $\lambda_Z = 6 \times 3/4 = 4.5$. La probabilità richiesta è una probabilità condizionata, data da

$$\begin{aligned} P(W \geq 4 | W \geq 2) &= \frac{P(W \geq 4 \cap W \geq 2)}{P(W \geq 2)} = \frac{P(W \geq 4)}{P(W \geq 2)} \\ &= \frac{1 - \sum_{k=0}^{3} P(W = k)}{1 - \sum_{k=0}^{1} P(W = k)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^{3} (4.5)^k e^{-4.5}/k!}{1 - \sum_{k=0}^{1} (4.5)^k e^{-4.5}/k!} = 0.7 \end{aligned}$$