Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Probabilità e Statistica - Prova teorica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 11 gennaio 2018

1. Enunciare e dimostrare la legge dei grandi numeri.

2.
   - Enunciare e dimostrare il Teorema del Limite Centrale.
   - Siano X_1, X_2, ..., X_n n variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, di media μ e varianza σ^2. Definiamo delle nuove variabili Y_k raggruppando le X_k tre a tre al modo seguente:

   $$Y_1 = \frac{X_1 + 2\,X_2 + X_3}{4}, \quad Y_2 = \frac{X_4 + 2\,X_5 + X_6}{4}, \quad ..., \quad \text{etc.}$$

   $$\text{ovvero} \qquad Y_k = \frac{X_{3k-2} + 2\,X_{3k-1} + X_{3k}}{4}.$$

   Si consideri ora la variabile (analoga alla variabile S_n che compare nel teorema del limite centrale)

   $$W_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_{n/3}}{\alpha\,\sigma\sqrt{n}},$$

   dove $\alpha = \sqrt{3/8}$. Seguendo i ragionamenti della dimostrazione del teorema del limite centrale, dimostrare che $\lim_{n\to\infty} W_n \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3.
   - Introdurre la nozione di stimatore di un parametro di una distribuzione. Definire quindi le nozioni di distorsione ed efficienza di uno stimatore.
   - Sia X una variabile casuale che rappresenta una popolazione di media μ e varianza σ^2. Sia inoltre $X_1, X_2, ..., X_n$ un campione indipendente di rango n estratto da tale popolazione. Dire se la statistica

   $$\widehat{\Lambda^2} = \frac{1}{2(n-1)}\,\left[(X_2 - X_1)^2 + (X_3 - X_2)^2 + ... + (X_n - X_{n-1})^2\right]$$

   è uno stimatore distorto, o meno, per la varianza.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Probabilità e Statistica - Prova teorica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 11 gennaio 2018

1.
   - Introdurre le definizioni di momento e di momento centrato di una variabile aleatoria X, mettendole in relazione con i parametri che caratterizzano la distribuzione di probabilità.
   - Siano $X_1, X_2, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti. Siano σ_j^2 e μ_j le loro varianze e le loro medie e siano ψ_j i loro momenti centrati del terz'ordine. Sia $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ la loro somma, di varianza σ^2, media μ e momento centrato del terz'ordine ψ. Dimostrare che

     $$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2$$
     $$\psi = \psi_1 + \psi_2 + ... + \psi_n;$$

     e dimostrare quindi che la proprietà additiva non vale per i momenti centrati del quart'ordine e superiori. (è sufficiente fare la dimostrazione per $n = 2$).

2.
   - Introdurre le nozioni di densità congiunta e densità marginali per una coppia di variabili aleatorie (X, Y) e discutere la loro relazione nel caso di variabili indipendenti, dimostrando ogni affermazione. Esprimere la probabilità che $(X, Y) \in R \subset \mathbb{R}^2$ in termini di tali densità.
   - Determinare la densità di probabilità di $Y = |X_1 - X_2|$ dove X_1 ed X_2 sono variabili indipendenti con densità $f_1(x_1)$ ed $f_2(x_2)$.

3.
   - Introdurre le variabili aleatorie normali e discuterne le principali proprietà.
   - Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dimostrare che

     $$E[|X - \mu|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2017/2018
Probabilità e Statistica - Prova teorica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 11 gennaio 2018

1. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Markov e la disuguaglianza di Chebyshev.
2. Sia X una variabile casuale qualsiasi e sia $Y = 2\,X + 1$ un'altra variabile. Calcolare il coefficiente di correlazione ρ delle due variabili.