Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2016/2017
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 febbraio 2017

1. (6 punti) Il serbatoio di una stazione di rifornimento viene riempito una volta alla settimana. Se la richiesta settimanale, in migliaia di litri, è rappresentata da una variabile esponenziale di parametro $\lambda = 1/10$, quanto grande deve essere la capacità del serbatoio affinchè la probabilità di esaurire la scorta settimanale sia di 0.01?

   Soluzione. Sia X la variabile che rappresenta la richiesta settimanale. Abbiamo

   $$X \sim \lambda\, e^{-\lambda\, x}$$

   con x in migliaia di litri e $\lambda = 1/10$. Ricordiamo che la funzione di ripartizione è

   $$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda\, x}.$$

   Se indichiamo con c la capacità del serbatoio, la domanda del problema equivale a chiedersi per quale valore di c si ha $P(X > c) = 0.01$. Pertanto:

   $$\begin{aligned}
   &0.01 = P(X > c) = 1 - P(X \le c) = 1 - (1 - e^{-\lambda\, c}) = e^{-\lambda\, c}\\
   &-\lambda\, c = \ln(0.01)\\
   &\lambda\, c = \ln(100)\\
   &c = \frac{1}{\lambda}\ln(100) = 10\,\ln(100) \approx 46.05
   \end{aligned}$$

2. (8 punti) Una ditta che produce componenti elettronici li vende in confezioni da n ciascuna. Ciascun componente può essere difettoso o funzionante, a seconda della concentrazione di una certa sostanza presente nel componente stesso. La concentrazione si può rappresentare come una variabile casuale Y di legge

   $$f_Y(y) = 3\, y^2, \qquad y \in [0, 1],$$

   con $f_Y(y) = 0$ altrimenti (e la stessa per tutti i componenti di una confezione). Se indichiamo con y il valore di tale concentrazione, il songolo componente è difettoso con probabilità $p_1 = 0.3$ se $y \le 0.5$ ed è difettoso con probabilità $p_2 = 0.8$ se $y > 0.5$. Sia X la variabile che rappresenta il numero di compenenti difettosi in una confezione. Determinare la legge di X e calcolare quindi la probabilità che una confezione di 4 componenti presa a caso ne contenga 2 difettosi.

Soluzione. Per un dato valore di Y, X è binomiale con:

$$P(X=k|Y\leq 0.5)=\binom{n}{k}\,p_1^k\,(1-p_1)^{n-k}$$
$$P(X=k|Y>0.5)=\binom{n}{k}\,p_2^k\,(1-p_2)^{n-k}$$

con $k=0,1,...,n$. Abbiamo inoltre

$$P_1=P(Y\leq 0.5)=\int_0^{1/2} f_Y(y)\,dy=\int_0^{1/2}(3\,y^2)\,dy=\frac{1}{8}$$
$$P_2=P(Y>0.5)=1-P(Y\leq 0.5)=\frac{7}{8}$$

Usando il teorema delle probabilità totali otteniamo per la legge di X:

$$P(X=k)=P(X=k|Y\leq 0.5)\,P(Y\leq 0.5)+P(X=k|Y>0.5)\,P(Y>0.5)=$$
$$\binom{n}{k}\left(p_1^k\,(1-p_1)^{n-k}\,P_1+p_2^k\,(1-p_2)^{n-k}\,P_2\right)=\frac{1}{8}\binom{n}{k}\left(p_1^k\,(1-p_1)^{n-k}+7\,p_2^k\,(1-p_2)^{n-k}\right)$$

Inserendo i valori dati, abbiamo per $n=4$ e $k=2$

$$P(X=2)\approx 0.167.$$

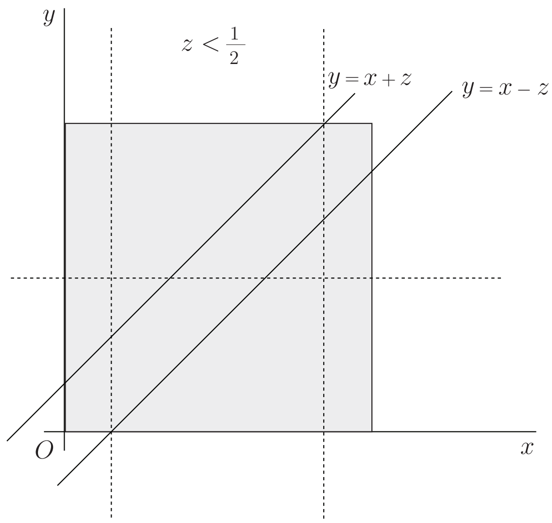
3. (10 punti) Due numeri X e Y vengono scelti a caso e indipendentemente con distribuzione uniforme nell'intervallo $[0,1]$.
   - Qualè la probabilità che differiscano per più di $1/2$?
   - Indichiamo con Z la distanza tra X e Y. Qualè la densità di Z? Qualè la distanza media tra X e Y? (*Suggerimento: calcolare preventivamente la funzione di ripartizione di* Z)

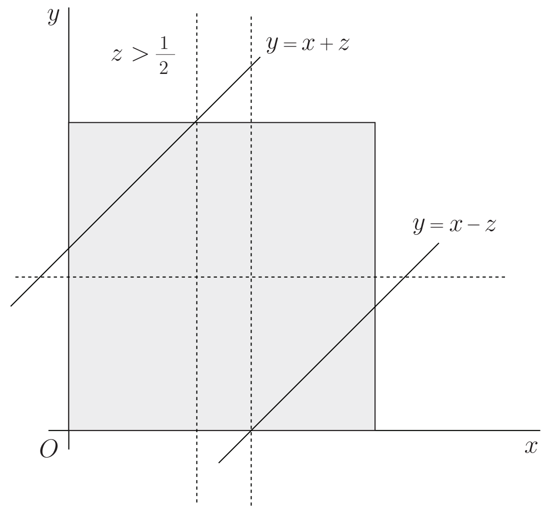
Soluzione. Rispondiamo alla prima domanda:

$$P(|X-Y|>1/2)=1-P(|X-Y|\leq 1/2)$$
$$P(|X-Y|\leq 1/2)=P(Y-1/2\leq X\leq Y+1/2)=$$
$$\int_0^{1/2}dx\int_0^{x+1/2}dy+\int_{1/2}^{1}dx\int_{x-1/2}^{1}dy=\frac{3}{4}$$
$$P(|X-Y|>1/2)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Per il secondo punto, introduciamo la funzione di ripartizione della Z:

$$F(z)=P(Z\leq z)=P(|X-Y|\leq z)=P(X-z\leq Y\leq X+z)=\int\int_R 1\,dx\,dy$$





dove R è la regione del piano cartesiano (x, y) data dall'intersezione del quadrato unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ con la striscia compresa tra le rette $y = x - z$ e $y = x + z$ e $z \in [0, 1]$. Con riferimento alla figura abbiamo per $z < 1/2$:

$$F(z) = \int\int_R 1\,dx\,dy = \int_0^z dx \int_0^{x+z} dy + \int_z^{1-z} dx \int_{x-z}^{x+z} dy + \int_{1-z}^1 dx \int_{x-z}^1 dy =$$
$$= \int_0^z (x+z)\,dx + \int_z^{1-z} 2\,z\,dx + \int_{1-z}^1 (1-x+z)\,dx = z\,(2-z)$$

e, per $z > 1/2$:

$$F(z) = \int\int_R 1\,dx\,dy = \int_0^{1-z} dx \int_0^{x+z} dy + \int_{1-z}^z dx \int_0^1 dy + \int_z^1 dx \int_{x-z}^1 dy =$$
$$= \int_0^{1-z} (x+z)\,dx + \int_{1-z}^z dx + \int_z^1 (1-x+z)\,dx = z\,(2-z)$$

Abbiamo pertanto

$$f(z) = F'(z) = 2\,(1-z)$$

e la distanza media quindi è

$$E[Z] = \int_0^1 z\,f(z)\,dz = \int_0^1 z\,2\,(1-z)\,dz = \frac{1}{3}.$$

4. (7 punti) Siano X_1, X_2 ed X_3 variabili aleatorie a due a due non correlate. Siano inoltre σ_1^2, σ_2^2 e σ_3^2 le loro rispettive varianze. Determinare il coefficiente di correlazione delle variabili X ed

Y date da $X = X_1 + X_2$ ed $Y = X_2 + X_3$.

Soluzione.

$$\begin{aligned}
&Cov(X,Y) = Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \\
&\quad = Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) + Cov(X_2, X_2) + Cov(X_2, X_3) = Var(X_2) = \sigma_2^2 \\
&Var(X) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2; \qquad Var(Y) = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \\
&\rho = \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}}
\end{aligned}$$

5. (9 punti) Siano $X_1, X_2, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti. Siano σ_j^2 e μ_j le loro varianze e le loro medie e siano ψ_j i loro momenti centrati del terz'ordine. Sia $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ la loro somma e indichiamo con μ e σ^2 la media e la varianza di Y. Sia inoltre ψ il momento centrato del terz'ordine di Y.

   - Dimostrare che $\psi = \psi_1 + \psi_2 + ... + \psi_n$;
   - dimostrare che la proprietà additiva non vale per i momenti centrati del quart'ordine e superiori.

   (è sufficiente fare la dimostrazione per $n = 2$).

Soluzione. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\psi = E[((X_1 - \mu_1) + (X_2 - \mu_2))^3] = E[(X_1 - \mu_1)^3] + E[(X_2 - \mu_2)^3] + \\
+3\left\{E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)^2] + E[(X_1 - \mu_1)^2 (X_2 - \mu_2)]\right\} = \psi_1 + \psi_2
\end{aligned}$$

in quanto $E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)^2] = E[(X_1 - \mu_1)^2 (X_2 - \mu_2)] = 0$, come segue dal fatto che X_1 e X_2 sono variabili indipendenti.

I momenti centrati di ordine 4 e superiore contengono comunque termini con il prodotto di potenze pari dei momenti centrati del primo ordine, che in generale non sono nulli.