Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2015/2016
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 6 settembre 2016

1. Il numero di pazienti che si presentano nello studio del dentista Rossi e', in media, di 5 ogni ora. Se indichiamo con X la variabile casuale che rappresenta tale numero,

   (i) calcolare la probabilità che in un intervallo di un'ora si presentino più di 5 ma meno di 8 pazienti;

   (ii) calcolare la probabilità che un paziente deva aspettare più di 5 e meno di 15 minuti per essere ricevuto.

Soluzione. Sia X la variabile che rappresenta il numero di pazienti in un'ora. Abbiamo

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

per $k = 0, 1, ...$ e con $\lambda = 5$.

(i)

$$P(5 < X < 8) = P(X = 6) + P(X = 7) = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^6}{6!} + \frac{\lambda^7}{7!} \right) = 0.25$$

(ii) Sia Y la variabile dei tempi di attesa. Essa è una variabile continua distribuita secondo la legge esponenziale con $\lambda = 5$ (in ore^{-1}). Quindi

$$P(5' < Y < 15') = \int_{1/12}^{1/4} \lambda\, e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda/12} - e^{-\lambda/4} = 0.37$$

2. Un *college* immatricola 1000 studenti all'anno, di cui 750 maschi e 250 femmine. Si sa che 500 maschi e 180 femmine si laureano regolarmente al termine del corso di studi, 150 maschi e 40 femmine si laureano dopo un anno fuori corso, e i rimenenti non si laureano. Indichiamo con X la variabile casuale che rappresenta il sesso degli studenti (con $X = -1$ per i maschi e $X = 1$ per le femmine) e con Y la variabile che rappresenta il tempo impiegato per laurearsi ($Y = 0$ se lo studente si laurea regolarmente, $Y = 1$ se si laurea dopo un anno e $Y = 2$ se non si laurea).

   (a) Determinare la densità congiunta di X e Y;

   (b) determinare le densità marginali di X e Y;

   (c) verificare se X ed Y sono indipendenti;

   (d) determinare media e varianza di X e Y;

(f) determinare il coefficiente di correlazione di X e Y.

(g) determinare la probabilità che una studentessa non si laurei;

(h) determinare la probabilità che uno studente (maschio) non si laurei.

Soluzione.

(a) La densità congiunta $f_{XY}(x,y)$ è data dalla tabella

	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=-1$	0.5	0.15	0.1
$x=1$	0.18	0.04	0.03

(b) basta sommare su righe e colonne, oppure rilevare direttamente dai dati del problema:

$$f_X(-1) = 0.75 \quad f_X(1) = 0.25$$
$$f_Y(0) = 0.68 \quad f_Y(1) = 0.19 \quad f_Y(2) = 0.13$$

(c) X ed Y non sono indipendenti in quanto $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)\, f_T(y)$, come si può verificare direttamente;

(d)

$$\begin{aligned}
E[X] &= (-1)\,0.75 + (1)0.25 = -0.5\\
E[Y] &= (0)\,0.68 + (1)\,0.19 + (2)\,0.13 = 0.45\\
E[X^2] &= (1)\,0.75 + (1)0.25 = 1\\
E[Y^2] &= (0)\,0.68 + (1)\,0.19 + (4)\,0.13 = 0.71\\
Var(X) &= E[X^2] - E[X]^2 = 1 - 0.25 = 0.75\\
Var(Y) &= E[Y^2] - E[Y]^2 = 0.71 - 0.2 = 0.51
\end{aligned}$$

(f) $E[XY] = (-1)\,0.15 + (1)\,0.04 + (-2)\,0.1 + (2)\,0.03 = -0.25$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = -0.25 - (-0.5)\,0.45 = -0.025$$
$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{-0.25}{\sqrt{0.75\,0.51}} = -0.4$$

(g) Sia F l'evento “studentessa e N l'evento “non si laurea. Abbiamo

$$P(N|F) = \frac{P(F\cap N)}{P(F)} = \frac{0.03}{0.25} = 0.12$$

o anche $\qquad P(N|F) = f_{Y|X}(y=2|x=1) = \dfrac{f_{XY}(1,2)}{f_X(1)} = \dfrac{0.03}{0.25} = 0.12$

(h) Sia M l'evento “studentessa e N l'evento “non si laurea. Abbiamo

$$P(N|M) = \frac{P(N\cap M)}{P(M)} = \frac{0.1}{0.75} = 0.13$$

3. Un concessionario di automobili vuoe verificare se la durata di una certa marca di pneumatici corrisponde alle specifiche fornite dalla ditta, che sono di 30000 km. A tal fine, riesce a testare un campione di 10 treni di pneumatici ed ottiene i seguenti dati per la durata, in migliaia di km:

$$31.2, 27.3, 25.6, 27.5, 21.5, 28.0, 31.8, 26.9, 26.9, 33.3$$

Utilizzando un test unilaterale, eseguire il test d'ipotesi al 90 %, 95 % e 99%.

Soluzione. Ipotesi nulla: $H_0 : \mu \geq \mu_0$ dove $\mu_0 = 30$. Ipotesi alternativa: $H_1 : \mu < \mu_0$. Dai dati abbiamo:

$$\overline{X}_n = 28.0 \qquad S = 3.4$$

Valore della statistica:

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{28.0 - 30}{3.4/\sqrt{10}} = -1.85$$

Dalle tavole dei quantili di Student: $t_{0.1}(9) = 1.383$, $t_{0.05}(9) = 1.833$, $t_{0.01}(9) = 2.821$. La regione di rigetto è data da $T < -t_\alpha(n-1)$; i dati consentono di rigettare l'ipotesi nulla al 90 % e al 95 % ma non al 99%.