Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2015/2016
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 16 febbraio 2016

1. II numero di automobili in arrivo a una stazione di rifornimento segue una distribuzione di Poisson con media di 6 ogni quarto d'ora.

   (i) Qual'è la probabilità che si presentino almeno 3 automobili dalle 10.30 alle 10.35?

   (ii) Assumendo ancora che l'evento del punto *(i)* si verifichi, qual'è la probabilità che dalle 10.30 alle 10.40 arrivino almeno 5 automobili?

Soluzione. Sia X il numero di automobili in un quarto d'ora. Allora X è distribuita secondo

$$\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

con $\lambda = 6$.

(i) Il numero di automobili in 5 minuti, che indichiamo con Y, avrà ancora una distribuzione di Poisson con $\lambda_Y = 2$. Avremo allora

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y < 3) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{(4)^k\, e^{-4}}{k!} = 0.32 \end{aligned}$$

(ii) Dobbiamo considerare il numero di automobili W in 10 minuti, che segue la distribuzione di Poisson con $\lambda_Z = 6 \times 2/3 = 4$. La probabilità richiesta è una probabilità condizionata, data da

$$\begin{aligned} P(W \geq 5 | W \geq 3) &= \frac{P(\{W \geq 5\} \cap \{W \geq 3\})}{P(W \geq 3)} = \frac{P(\{W \geq 5\})}{P(W \geq 3)} \\ &= \frac{1 - \sum_{k=0}^{4} P(W = k)}{1 - \sum_{k=0}^{2} P(W = k)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^{4} (4)^k e^{-4}/k!}{1 - \sum_{k=0}^{2} (4)^k e^{-4}/k!} = 0.49 \end{aligned}$$

2. Le emissioni di CO_2 di un certo modello di automobile è in media di 150 g/km. Viene introdotto un nuovo convertitore catalitico che dovrebbe abbassare il livello delle emissioni. Un campione casuale di 20 automobili selezionate a caso dopo l'introduzione del nuovo convertitore, ha una media campionaria $\overline{X}_n = 145\, g/km$ e una deviazione standard campionaria $S_n = 10\, g/km$.

   (a) Calcolare l'intervallo di confidenza al 95 % per la media μ delle emissioni dopo l'introduzione del nuovo convertitore;

(b) testare, ad un livello di significatività del 5 %, l'ipotesi nulla che l'emissione media non sia diminuita con l'introduzione del nuovo convertitore.

Soluzione.

(i) Il valore del quantile di Student da usare è $t_{\alpha/2}(n-1)$ con $\alpha = 0.05$ e $n = 20$; otteniamo $t_{0.025}(19) = 2.093$. Con questi dati l'intervallo di confidenza al 95 % è

$$\left[145 - \frac{10}{\sqrt{20}}2.093,\ 145 + \frac{10}{\sqrt{20}}2.093\right] = [140.32, 149.68]$$

(ii) Il test è unilaterale con

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

e il valore del quantile di Student che dobbiamo usare è $t_{0.05}(19) = 1.729$.

La statistica del test è

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{145 - 150}{10/\sqrt{20}} = -2.23 < -1.729$$

con il conseguente rifiuto dell'ipotesi nulla.

3. In un gruppo di 1000 individui, nell'80 % dei quali è presente una data malattia infettiva, un test ha dato 700 positivi tra le persone realmente malate e 20 tra quelle non malate.

(i) Calcolare sensibilità e specificità del test[1];

(ii) se il test viene effettuato su una popolazione in cui si sa che la diffusione della malattia è del 15 %, qualè la probabilità che un individuo positivo al test sia realmente malato?

Soluzione.

(i) Si chiede $P(T+|M)$ e $P(T-|S)$, dove $T+$ e $T-$ sono gli eventi "positivo al test" e "negativo al test", $M =$"persona malata", $S =$"persona sana". Abbiamo: $P(M) = 0.8$; $P(S) = 1 - P(M) = 0.2$; $P(T+\cap M) = 0.7$; $P(T+\cap S) = 0.02$. Inoltre ci servirà $P(T-\cap S) = 180/1000 = 0.18$. Allora:

$$\text{sens.} = P(T+|M) = \frac{P(T+\cap M)}{P(M)} = \frac{0.7}{0.8} = 0.875$$
$$\text{spec.} = P(T-|S) = \frac{P(T-\cap S)}{P(S)} = \frac{0.18}{0.2} = 0.9$$

[1] La sensibilità è definita come la probabilità che il test dia esito positivo se una persona è malata; la specificità è la probabilità che il test dia esito negativo se una persona è sana.

(ii) Si chiede $P(M|T+)$ nel caso in cui la sensibilità e la specificità del test sono date dai valori riportati sopra e $P(M) = 0.15$. Ci servirà $P(T+)$ che è dato dalla formula delle probabilità totali:

$$P(T+) = P(T+|M)\,P(M) + P(T+|S)\,P(S) = 0.875 \times 0.15 + (1 - 0.9) \times 0.85 = 0.22$$

Abbiamo pertanto:

$$P(M|T+) = \frac{P(T+|M)\,P(M)}{P(T+)} = \frac{sens.\,0.15}{0.22} = \frac{0.875 \times 0.15}{0.22} = 0.6.$$