Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2014/2015
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 febbraio 2015

1. Una fabbrica produce caldaie; sia p la frazione di caldaie difettose. Esprimere la probabilità che, su un campione di N caldaie, k siano difettose, usando sia la distribuzione binomiale che quella di Poisson. Posto, quindi, $N = 120$ e $k = 3$, confrontare i due valori (binomiale e Poisson) per $p = 0.01$, 0.05 e 0.1, commentando i risultati.

Soluzione. Il numero di caldaie difettose segue la legge binomiale $B(N, p)$. Quindi, se indichiamo con X il numero di caldaie difettose su un campione di N, la probabilità che k siano difettose è data da

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Nel passaggio dalla distribuzione binomiale a quella di Poisson, dobbiamo porre $\lambda = N\,p$, e la probabilità diventa

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Nei tre casi numerici, abbiamo $\lambda = 1.2$, 6 e 12. Otteniamo con la binomiale::

$$P(X = 3) = \binom{120}{3} 0.01^3\, 0.99^{127} = 0.0867 \quad \text{per} \quad p = 0.01$$
$$P(X = 3) = \binom{120}{3} 0.05^3\, 0.95^{127} = 0.0869 \quad \text{per} \quad p = 0.05$$
$$P(X = 3) = \binom{120}{3} 0.1^3\, 0.9^{127} = 0.0012 \quad \text{per} \quad p = 0.1$$

mentre con Poisson

$$P(X = 3) = e^{-1.2} \frac{1.2^3}{3!} = 0.0867 \quad \text{per} \quad p = 0.01$$
$$P(X = 3) = e^{-6} \frac{6^3}{3!} = 0.0892 \quad \text{per} \quad p = 0.05$$
$$P(X = 3) = e^{-12} \frac{12^3}{3!} = 0.0018 \quad \text{per} \quad p = 0.1$$

che fornisce un'approssimazione migliore quando $\lambda \sim 1$.

2. Consideriamo una popolazione di famiglie con due figli. Supponiamo che ad ogni nascita la probabilità di essere maschio sia uguale a quella di essere femmina. Presa una famiglia a caso, sia A_1 l'evento "entrambi i sessi sono rappresentati" ed A_2 l'evento "al più uno dei figli è

femmina". Dire se A_1 ed A_2^c sono compatibili e se sono indipendenti. Inoltre, supponiamo che per la nascita di un terzo figlio, la probabilità che sia maschio sia 11/20 se i primi due sono maschi, 2/5 se sono femmine e 1/2 negli altri casi. Sapendo che in una famiglia il terzo figlio e' maschio, qual'è la probabilità che i primi due fossero maschi?

Soluzione. Sia M ="nascita di un maschio e sia F ="nascita di una femmina. Abbiamo $P(F) = P)M) = 1/2$. Indichiamo ora con $\{F, F\}$, $\{F, M\}$, $\{M, F\}$ e $\{M, M\}$ le possibili coppie di figli di una famiglia. Abbiamo

$$\begin{aligned} A_1 &= \{F, M\} \cup \{M, F\} \\ A_2 &= \{F, M\} \cup \{M, F\} \cup \{M, M\} \\ A_2^c &= \{F, F\} \end{aligned}$$

Risulta $A_1 \cap A_2^c = \emptyset$ quindi A_1 ed A_2^c sono incompatibili. Inoltre, $0 = P(A_1 \cap A_2^c) \neq P(A_1)\, P(A_2^c)$, quindi non sono indipendenti. Con l'introduzione del terzo figlio, e con notazione ovvia, abbiamo $P(M|MM) = 11/20$, $P(M|FF) = 2/5$ e $P(M|MF) = P(M|FM) = 1/2$. La domanda richiesta è $P(MM|M)$ che si risolve applicando la formula di Bayes:

$$P(MM|M) = \frac{P(M|MM)\, P(MM)}{P(M)} = \frac{P(M|MM)\, P(MM)}{P(M)}$$

Per il denominatore abbiamo

$$\begin{aligned} &P(M) = P(M|MM)\, P(MM) + P(M|MF)\, P(MF) + P(M|FM)\, P(FM) + P(M|FF)\, P(FF) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{11}{20} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) = \frac{39}{80} \end{aligned}$$

e quindi

$$P(MM|M) = \frac{\frac{11}{20}\frac{1}{4}}{\frac{39}{80}} = \frac{11}{39}$$

3. Siano X e Y due variabili aleatorie continue indipendenti con X uniforme su $[0, 1]$ ed Y esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Calcolare $P(\{X \geq Y\})$.

Soluzione. Le distribuzioni marginali sono date da

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 1, \ \ 0 \leq x \leq 1 \\ &= 0 \ \text{ altrimenti} \\ f_Y(y) &= \lambda\, e^{-\lambda\, y}, \ \ 0 \leq y < \infty \ \text{ con } \ \lambda = 2 \\ &= 0 \ \text{ altrimenti} \end{aligned}$$

Siccome X ed Y sono indipendenti, la densità congiunta è data da $f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$. Sia ora D il dominio del piano (x, y) dove $\{X \geq Y\}$; abbiamo

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \ \ 0 \leq y \leq x\}$$

Calcoliamo prima

$$P(\{X \le Y\}) = \int\int_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy\,\lambda\, e^{-\lambda\, y} =$$
$$= \int_0^1 dx\,(1 - e^{-\lambda\, x}) = 1 - \left[\frac{e^{-\lambda\, x}}{-\lambda}\right]_0^1 = 1 - \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} = 1 - \frac{1-e^{-2}}{2} = 0.57$$

4. Un giocatore vince 4 euro se, gettando due dadi, la somma dei due punteggi è pari ma era dispari nel lancio precedente, perde 2 euro se la somma è dispari ma era pari nel lancio precedente e perde 1 euro negli altri casi. Quantè la vincita media e quant'è lo scarto quadratico?

Soluzione. Sia X la variabile casuale che indica la vincita. X può assumere i valori 4, -2 e -1. La probabilità di ottenere un numero pari nella somma dei punteggi è $1/2$, uguale alla probabilità di ottenere una somma dispari. Inoltre, lanci successivi sono indipendenti. Quindi:

$$P(X = 4) = P(X = -2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$P(X = -1) = \frac{1}{2}$$

Ne segue che

$$E[X] = 4\,\frac{1}{4} - 2\,\frac{1}{4} - 1\,\frac{1}{2} = 0$$
$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] = 16\,\frac{1}{4} + 4\,\frac{1}{4} + 1\,\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$
$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{11}{2}} \approx 2.35$$