Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2014/2015
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 13 gennaio 2015

1. Il territorio di una nazione viene diviso in tre regioni, Nord, Centro e Sud. Siano n_1, n_2 ed n_3 gli abitanti di ciascuna regione (Nord = 1, Centro = 2, Sud = 3). Si sceglie quindi una persona a caso e si denota con X il numero totale di abitanti della sua regione di appartenenza. Si sceglie, poi, indipendentemente e a caso, una delle tre regioni e si denota con Y il numero totale di abitanti quella regione.

   (i) Qualè la distribuzione di probabilità di X e di Y?

   (ii) Qualè il valore di aspettazione di X e di Y?

   (iii) Rispondere alle domande precedenti nel caso in cui gli abitanti in totale siano 10 milioni e le tre regioni contino rispettivamente 4, 3.5 e 2.5 milioni di abitanti.

Soluzione.

(i) Le due variabili casuali X e Y sono discrete e possono assumere gli stessi valori, $\{n_1, n_2, n_3\}$, con probabilità $p_X(n_i) = n_i/N$ e $p_Y(n_i) = 1/3$, $i = 1, 2, 3$.

(ii) $E[X] = \sum_{i=1}^{3} n_i\, p_X(n_i) = \sum_{i=1}^{3} (n_i^2)/N$; $E[Y] = \sum_{i=1}^{3} n_i\, p_Y(n_i) = \sum_{i=1}^{3} (n_i)/3 = N/3$.

(iii) $p_X(n_1) = 4/10 = 0.4$, $p_X(n_2) = 3.5/10 = 0.35$, $p_X(n_3) = 2.5/10 = 0.25$; dunque $E[X] = 3.45$ milioni e $E[Y] = 10/3 \approx 3.33$ milioni.

2. II numero di visite a domicilio praticate da un medico di base segue una distribuzione di Poisson con media di 6 al giorno (giornata di 8 ore).

   (i) Qual'è la probabilità che il medico effettui almeno 2 visite dalle 8.00 alle 12.00?

   (ii) Assumendo che l'evento del punto *(i)* si verifichi, qual'è la probabilità che dalle dalle 8.00 alle 14.00 vi siano almeno 4 visite?

Soluzione. Sia X il numero di visite in un giorno. Allora X è distribuita secondo

$$\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

con $\lambda = 6$.

(i) Il numero di visite in 4 ore, che indichiamo con Y, avrà ancora una distribuzione di Poisson con $\lambda_Y = 6/2 = 3$. Avremo allora

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{3^k\, e^{-3}}{k!} = 0.8 \end{aligned}$$

(ii) Dobbiamo considerare il numero di visite, W, in 6 ore, che segue la distribuzione di Poisson con $\lambda_Z = 6 \times 3/4 = 4.5$. La probabilità richiesta è una probabilità condizionata, data da

$$\begin{aligned} P(W \geq 4 | W \geq 2) &= \frac{P(W \geq 4 \cap W \geq 2)}{P(W \geq 2)} = \frac{P(W \geq 4)}{P(W \geq 2)} \\ &= \frac{1 - \sum_{k=0}^{3} P(W = k)}{1 - \sum_{k=0}^{1} P(W = k)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^{3} (4.5)^k e^{-4.5}/k!}{1 - \sum_{k=0}^{1} (4.5)^k e^{-4.5}/k!} = 0.7 \end{aligned}$$

3. Una copisteria riceve l'ordine di stampare 11 copie di un libro di 200 pagine. La stampante usata utilizza una cartuccia (toner) la cui durata è una variabile aleatoria di media 1000 pagine e deviazione standard di 80 pagine. Usando l'approssimazione normale, calcolare la probabilità che la copisteria riesca a completare l'ordine con 2 cartucce.

Soluzione. Siano X_1 ed X_2 le durate della cartucce (in numero di pagine), distribuite secondo una legge $N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 1000$ e $\sigma^2 = 80^2 = 6400$. La stampante deve stampare $11 \times 200 = 2200$ pagine. La probabilità che non si debbano usare più di 2 cartucce è $P(X_1 + X_2 \geq 2200)$. Abbiamo pertanto:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \geq 2200) &= P\left(\frac{X_1 + X_2 - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \geq \frac{2200 - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}}\right) \\ &= P(S_n \geq 1.77) = 1 - P(S_n \leq 1.77) = 1 - \Phi(1.77) = 1 - 0.96 = 0.04 \end{aligned}$$

dove S_n è la variabile che, per il teorema del limite centrale, segue una distribuzione normale standard. La probabilità richiesta è pertanto circa del 4%.

4. Viene misurata la resistenza R di 9 lampadine ad incandescenza, tutte della stessa marca e tutte da 100 W. Se le 9 misurazioni danno i valori $6, 9.5, 10, 12, 8, 9, 8.5, 7.5, 11.5$, si determini un intervallo di confidenza al 95% per R.

Soluzione. Siccome la varianza è incognita ed il campione piccolo, dovremo usare la legge di Student ad 8 gradi di libertà. Abbiamo per la media campionaria $\overline{X}_n = 9.11$, e $S^2 = 3.61$ per la varianza campionaria, con $n = 9$. L'intervallo di confidenza è dato da

$$\left(\overline{X}_n - t_{\alpha/2}(8)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{\alpha/2}(8)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(9.11 - t_{\alpha/2}(8)\sqrt{\frac{3.61}{9}}, 9.11 + t_{\alpha/2}(8)\sqrt{\frac{3.61}{9}}\right)$$

Nel nostro caso $t_{0.025}(8) = 2.306$ e sostituendo si ottiene $R \in (7.65, 10.57)$