Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2013/2014
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 10 novembre 2014

1. Un canale di trasmissione trasmette le cifre 0 e 1. A causa degli errori lungo la linea, la cifra trasmessa ha una probabilità $p = 0.2$ di essere ricevuta errata. Per sicurezza, allora, viene trasmessa una sequenza di cinque zeri, 00000, o una sequenza di cinque uno, 11111, al posto del segnale semplice 0 o 1. Se la decodificazione avviene a maggioranza (cioè, ad esempio, la sequenza 10011 viene interpretata come 1, etc.), qual è la probabilità che il messaggio venga decodificato in modo errato?

Soluzione. Supponiamo che il segnale trasmesso sia 11111 (se fosse 00000 il ragionamento sarebbe analogo). Il numero di 1 ricevuto è una variabile casuale X distribuita secondo la binomiale $B(n,p)$ con $n = 5$ e $p = 0.8$. La probabilità che il segnale non venga decodificato correttamente è $P(X \leq 2)$, vale a dire

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} (0.8)^k \, (0.2)^{3-k} = 0.058$$

Equivalentemente, indicando con Y il numero di 1 non ricevuti, con $Y \sim B(5, 0.2)$, si perviene allo staso risultato con

$$P(Y \geq 3) = \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} (0.2)^k \, (0.8)^{3-k} = 0.058$$

2. La probabilità congiunta di due variabili X ed Y è data dalla relazione

$$f(x,y) = \alpha \left(x^2 + \frac{x\,y}{2} \right), \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 2.$$

   (a) Determinare il valore di α;
   (b) calcolare le densità marginali;
   (c) determinare $P(X > Y)$.

Soluzione.

(a) Deve essere

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dy f(x,y) = 1,$$

che fornisce $\alpha = 6/7$, valore usato d'ora in poi nella funzione f.

(b)

$$f_Y(y) = \int_0^1 dx\, f(x,y) = \frac{3y}{14} + \frac{2}{7}$$
$$f_X(x) = \int_0^2 dy\, f(x,y) = \frac{12x^2}{7} + \frac{6x}{7}$$

(c) È l'integrale di $f(x,y)$ sulla regione di piano data da

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\},$$

che fornisce

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy\, f(x,y) = \frac{15}{56}$$

3. Un giocatore di scacchi partecipa ad un torneo dove incontra 10 avversari. I suoi avversari si dividono in due gruppi; il gruppo A contiene 6 giocatori del suo livello, contro i quali ha probabilità $p_A = 0.5$ di vincere, mentre il gruppo B contiene 4 avversari un pò più deboli, contro i quali ha probabilità $p_B = 0.7$ di vincere. Sia X la variabile casuale che rappresenta il numero totale di vittorie nel torneo, X_A il numero di vittorie contro gli avversari del gruppo A e X_B il numero di vittorie contro quelli del gruppo B.

(a) Qual è la legge di X_A e di X_B?

(b) Qual è la relazione tra X_A, X_B ed X?

(c) Qual è la legge di X?

(d) Qual è la probabilità che il giocatore vinca almeno 6 incontri?

Negli ultimi 2 punti è sufficiente l'espressione. Se, poi, qualcuno vuole fare i calcoli, si accomodi.

Soluzione. Le variabili X_A e X_B hanno una distribuzione binomiale del tipo

(a) $X_A \sim B(6, p_A) = B(6, 0.5)$ e $X_B \sim B(4, p_B) = B(4, 0.7)$

(b) $X = X_A + X_B$ (non è binomiale);

(c) X può assumere tutti i valori interi da 0 a 10. Quindi, $P(X = n) = 0$ per $n < 0$ e $n > 10$. Poi:

$$\begin{aligned}
P(X = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_B = k)\, P(X_A = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (0.7)^k\, (0.3)^{n-k} \binom{n}{n-k} (0.5)^{n-k}\, (0.5)^k, \quad n < 4 \\
P(X = n) &= \sum_{k=0}^{4} P(X_B = k)\, P(X_A = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} (0.7)^k\, (0.3)^{n-k} \binom{n}{n-k} (0.5)^{n-k}\, (0.5)^k, \quad n \ge 4
\end{aligned}$$

(d) La probabilità cercata è

$$P(X \geq 6) = \sum_{n=6}^{10} P(X = n).$$

4. Un signore che è soggetto a frequenti mal di testa parte per un viaggio di un anno. Ad ogni attacco di emicrania prende due pastiglie di una certa medicina, per cui deve partire con una scorta sufficiente. Se il numero di attacchi per settimana è distribuito secondo una legge normale di media 5 e deviazione standard 1, con quante pastiglie deve partire quel signore affinchè la probabilità di non esaurire la scorta sia del 5%?

Soluzione. Un anno è fatto da 52 settimane. Sia X_i il numero di emicranie occorse nella $i-$esima settimana. Il numero di emicranie nell'anno di assenza è dunque

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_{51} + X_{52}.$$

Dobbiamo calcolare il valore x di X tale che $P(X > x) \leq 0.05$. Abbiamo

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - P\left(Z \leq \frac{x - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq 0.05$$

dove $n = 52$, $\mu = 1$, $\sigma = 1$ e Z è la variabile X standardizzata. Dalla tabella dei percentili, abbiamo $z = 1.645$ che fornisce, con i dati del problema,

$$x = \sigma\sqrt{n}\,z + n\,\mu = \sqrt{52}\ \times\ 1.645 + 52\ \times\ 5 \approx 272$$

Siccome la persona prende 2 pastiglie ad ogni attacco, dovrà partire con $272 \times 2 = 544$ pastiglie.