Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2013/2014
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 9 settembre 2014

1. *(i)* Siano A e B due eventi. Calcolare $P(A)$ sapendo che

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$
$$P(A|B^c) = \frac{1}{8}$$
$$P(B) = \frac{1}{2}$$

Soluzione. Abbiamo

$$P(A) = P(S \cap A) = P(B \cap A) + P(B^c \cap A) = \frac{1}{4} + P(A|B^c)\, P(B^c) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,\frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

2. Il tempo di vita di un certo componente elettronico segue una distribuzione esponenziale con una media di 5 anni. Sapendo che un dato componente ha già un anno, qual'è la probabilità che si guasti durante il quanto anno di funzionamento?

Soluzione. Sia X la v.a. che rappresenta il tempo di vita in anni. Si ha

$$X \sim \lambda\, e^{-\lambda t}, \qquad \lambda = \frac{1}{5}$$

dove t è espresso in anni. La probabilità richiesta è $P(\{4 < X < 5\}|X > 1)$. Abbiamo

$$P(\{4 < X < 5\}|X > 1) = \frac{P(\{4 < X < 5\} \cap \{X > 1\})}{P(\{X > 1\})} = \frac{P(\{4 < X < 5\})}{P(\{X > 1\})}$$

Inoltre:

$$P(\{4 < X < 5\}) = \int_4^5 \lambda\, e^{-\lambda t} = \Big[-e^{-\lambda t}\Big]_4^5 = e^{-4\,\lambda} - e^{-5\,\lambda}$$
$$P(\{X > 1\}) = \int_1^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} = \Big[-e^{-\lambda t}\Big]_1^\infty = e^{-\lambda}$$

Sostituendo otteniamo

$$P(\{4 < X < 5\}|X > 1) = \frac{e^{-4\,\lambda} - e^{-5\,\lambda}}{e^{-\lambda}} = e^{-3\,\lambda} - e^{-4\,\lambda} = e^{-3/5} - e^{-4/5} \approx 0.1$$

3. La densità congiunta di due variabili continue X ed Y è data da

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3/4 & \text{se} \quad -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$, il coefficiente di correlazione $\rho_{X,Y}$ e dire se le due variabili sono indipendenti, giustificando la risposta.

Soluzione. Indichiamo con R la regione $-1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{x^2}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{1} dy\,\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\,(1-x^2), \quad -1 \le x \le 1 \\ & \ 0 \quad \text{altrimenti} \\ f_Y(y) &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \frac{3}{4}\,2\,\sqrt{y} = \frac{3}{2}\,\sqrt{y}, \quad 0 \le y \le 1 \\ & \ 0 \quad \text{altrimenti} \end{aligned}$$

Il coefficiente di correlazione è definito da

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}$$

per il cui calcolo abbiamo bisogno delle due varianze e della covarianza. Iniziamo dai valori medi

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-1}^{1} dx\,x\,\frac{3}{4}\,(1-x^2) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} dx\,x\,(1-x^2) = 0 \\ E[Y] &= \int_{0}^{1} dy\,y\,\frac{3}{2}\,\sqrt{y} = \frac{3}{5}\,\left[y^{5/2}\right]_0^1 = \frac{3}{5} \\ E[X^2] &= \int_{-1}^{1} dx\,x^2\,\frac{3}{4}\,(1-x^2) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} dx\,x^2\,(1-x^2) = \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \\ &= \frac{3}{4}\,2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5} \\ E[Y^2] &= \int_{0}^{1} dy\,y^2\,\frac{3}{2}\,\sqrt{y} = \frac{3}{7}\,\left[y^{7/2}\right]_0^1 = \frac{3}{7} \\ E[X\,Y] &= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy\,x\,y\,\frac{3}{4} = 0 \\ Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{5} \\ Var[Y] &= E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{3}{7} - \frac{9}{25} = \frac{12}{175} \\ Cov(X,Y) &= E[X\,Y] - E[X]\,E[Y] = 0 \end{aligned}$$

Le variabili sono scorrelate, ma non indipendenti, come è facile vedere dal fatto che $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\,f_Y(y)$.

4. Si considerino 1000 lampadine, il cui tempo di vita segue una distribuzione esponenziale con una media di 5 giorni. Usando l'approssimazione normale, calcolare la probabilità che il tempo di vita totale delle lampadine superi 5200 giorni.

Soluzione. Indichiamo: $n = 1000$, $\mu = 5$, $\lambda = 1/\mu = 1/5$ (perchè la legge è esponenziale) e $Var(X_i) = \sigma^2 = 1/\lambda^2 = 25$, quindi $\sigma = 5$. Sia X_i, $i = 1, ..., n$ il tempo di vita della i-esima lampadina. La probabilità richiesta è $P(X_1 + x_2 + ... + X_n > 5200)$. Standardizzando si ha

$$P\left(\frac{X_1 + x_2 + ... + X_n - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} > \frac{5200 - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}}\right) = P\left(Z_n^* > \frac{200}{5 * \sqrt{1000}}\right)$$
$$= P\left(Z_n^* > 1.26\right) = 1 - P\left(Z_n^* < 1.26\right) = 1 - \Phi(1.265) = 1 - 0.89617 = 0.10383$$