Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2013/2014
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 17 luglio 2014

1. *(i)* Una ditta produttrice di birra deve trasportare la merce dal punto di produzione P ad un magazzino M situato a 100 km di distanza da P. Per fare ciò, usa dei camion piuttosto vecchi che si possono rompere con probabilità uniforme lungo la strada. Dove dovrebbe la compagnia posizionare un'autofficina per le riparazioni in modo da minimizzare la distanza attesa tra un possibile punto di rottura e l'autofficina? In altre parole, se X è una v.a. che rappresenta la distanza tra P ed il punto di rottura, ed a è la distanza tra l'autofficina ed il punto di rottura, quale valore di a minimizza $E[|X-a|]$?
(ii) Rispondere alla stessa domanda se la densità di probabilità del punto di rottura non è uniforme ma segue la legge $f(x) = 2\,x/10000$.

Soluzione.

(i) Abbiamo per la densità della variabile X:

$$f(x) = \frac{1}{100}, \qquad 0 \le x \le 100$$
$$f(x) = 0 \qquad \text{altrimenti}$$

$$\begin{aligned}
E[|X-a|] &= \int_0^{100} |x-a|\, f(x)\, dx = \int_0^a (a-x)\, f(x) + \int_a^{100} (x-a)\, f(x)\, dx = \\
&= \frac{1}{100}\left\{ \int_0^a (a-x)\, dx + \int_a^{100} (x-a)\, dx \right\} = \\
&= \frac{1}{100}\left\{ \left[\frac{(a-x)^2}{2}\right]_a^0 + \left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^{100} \right\} = \\
&= \frac{1}{100}\left\{ \frac{a^2}{2} + \frac{(100-a)^2}{2} \right\} \equiv g(a)
\end{aligned}$$

Derivando otteniamo:

$$g'(a) = \frac{1}{100}\,[a-(100-a)] = \frac{1}{100}\,[2\,a - 100]$$

che si annulla per $a = 50$.

(ii) In questo caso

$$f(x) = \frac{2\,x}{10000}, \qquad 0 \le x \le 100$$
$$f(x) = 0 \qquad \text{altrimenti}$$

$$
\begin{aligned}
E[|X-a|] &= \int_0^{100} |x-a|\, f(x)\, dx = \int_0^a (a-x)\, f(x) + \int_a^{100} (x-a)\, f(x)\, dx = \\
&= \frac{1}{5000} \left\{ \int_0^a x\,(a-x)\, dx + \int_a^{100} x\,(x-a)\, dx \right\} \\
&= \frac{1}{5000} \left\{ \left[a\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3} - a\,\frac{x^2}{2} \right]_a^{100} \right\} = \\
&= \frac{1}{5000} \left\{ \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{6} + 10000 \left(\frac{100}{3} - \frac{a}{2} \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{5000} \left\{ \frac{a^3}{3} + 10000 \left(\frac{100}{3} - \frac{a}{2} \right) \right\} \equiv g(a)
\end{aligned}
$$

Derivando otteniamo:

$$g'(a) = \frac{1}{5000}\, \left(a^2 - 5000\right)$$

che si annulla per $a = \sqrt{5000} = 50\,\sqrt{2} \approx 70.71$.

2. Il serbatoio di una stazione di servizio viene riempito una volta alla settimana. La domanda settimanale di carburante in migliaia di litri segue una legge esponenziale di parametro $\lambda = 1/10$. Quanto deve essere grande il serbatoio se vogliamo che la probabilità di esaurire la scorta settimanale sia di $1/100$?

Soluzione. Sia X il numero di litri (in migliaia) he la stazione deve erogare in una settimana. Indichiamo con a la capacità del serbatoio, sempre in migliaia di litri. La funzione di distribuzione di X è data dalla legge esponenziale

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}, \qquad x \geq 0 \\
&f(x) = 0 \qquad \text{altrimenti}
\end{aligned}
$$

e la sua funzione di ripartizioneè

$$
\begin{aligned}
&F(x) = 1 - e^{-\lambda\, x}, \qquad x \geq 0 \\
&F(x) = 0 \qquad \text{altrimenti.}
\end{aligned}
$$

La probabilità di esaurire la scorta settimanale è allora data da

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda\, a}.$$

Si richiede allora che

$$e^{-\lambda\, a} = \frac{1}{100}, \quad \text{cioè} \quad \lambda\, a = \ln 100$$

e quindi, usando il valore $\lambda = 1/10$, abbiamo

$$a = 10\, \ln 100 \approx 46.$$

3. L'ossigeno consumato da una persona che cammina è funzione della sua velocità. La seguente tabella riporta il volume di ossigeno consumato a varie velocità di cammino. Ipotizzando una relazione lineare, scrivere l'equazione della retta di regressione.

Velocità (km/h)	**Ossigeno** (l/h)
0	19.5
1	22.1
2	24.3
3	25.7
4	26.1
5	28.5
6	30.0
7	32.1
8	32.7
9	32.7
10	35.0

Soluzione. La retta di regressione ha equazione $y = A + B\,x$ e le formule da applicare sono:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i\,y_i - n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - n\,\overline{x}^2} \\ A &= \overline{y} - B\,\overline{x} \end{aligned}$$

ottenendo $B = 1.5$ e $A = 20.7$.

4. Due strade a più corsie, A e B, confluiscono in una terza strada C, che ha più corsie delle altre due. Si considera il traffico in una sola direzione e si studia il problema della congestione. Durante i periodi di punta, la probabilità che ci sia congestione sulla strada A è 0.1, mentre è 0.3 sulla strada B. Inoltre, quando il traffico è bloccato sulla strada B, è bloccato sulla strada A una volta su tre.

- Calcolare la probabilità che ci sia congestione:
  - su entrambe le strade A e B;
  - sulla strada B, dato che lo è sulla strada A;
  - sulla strada A soltanto;
  - sulla strada B soltanto;
  - sulla strada A o sulla strada B;
  - ne' sulla strada A ne' sulla strada B.
- Sulla strada C, il traffico è bloccato con probabilità
  - 1, se è bloccato sia su A che su B;
  - 0.15, se è bloccato sulla B soltanto;

– 0.1, se non c'è congestione ne' su A ne' su B.

Calcolare la probabilità di congestione *(i)* sulla strada C e *(ii)* sulla strada A se c'è congestione sulla C.

Soluzione. I dati sono: $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.3$, $P(A|B) = 1/3$.

- – $P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B) = 0.3 \times 1/3 = 0.1$;
  – $P(B|A) = \frac{P(A|B)\, P(B)}{P(A)} = \frac{1/3 \times 0.3}{0.1} = 1$; o anche $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$;
  – $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0$;
  – $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = 0.2$;
  – $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3$;
  – $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(B \cap A^c) + P(B^c \cap A) - P(A \cap B) = 0.7$.
- I dati sono: $P(C|A \cap B) = 1$, $P(C|B \cap A^c) = 0.15$ e $P(C|A^c \cap B^c) = 0.1$.
  (i) $P(C) = P(C|A \cap B)P(A \cap B) + P(C|B \cap A^c)P(B \cap A^c) + P(C|A^c \cap B^c)P(A^c \cap B^c) = 0.1 + 0.15 \times 0.2 + 0.1 \times 0.7 = 0.2$
  (ii) $P(A|C) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)}$. Ora: $P(C \cap A) = P(C \cap ((A \cap B) \cup (A \cap B^c))) = P(C \cap (A \cap B)) + P(C \cap (A \cap B^c)) = P(C|(A \cap B))P(A \cap B) + P(C|(A \cap B^c))P(A \cap B^c) = 0.1$