Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2013/2014
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 16 giugno 2014

1. Si inseriscono due palline in un' urna; ciascuna di esse può essere blu o rossa con uguale probabilità. Si eseguono due estrazioni con rimpiazzo; se entrambe le palline estratte sono rosse, qualè la probabilità che

   (i) entrambe le palline nell'urna fossero rosse ?

   (ii) se si estrae nuovamente una pallina questa sia rossa ?

Soluzione. Definiamo gli eventi:

R_1= "la pallina 1 è rossa"; R_2= "la pallina 2 è rossa";
Y_1= "la prima pallina estratta è rossa"; Y_2= "la seconda pallina estratta è rossa";
Abbiamo $P(R_1) = P(R_2) = 1/2$. Si chiede

(i) La probabilità richiesta è $P(\{R_1 \cap R_2\}|\{Y_1 \cap Y_2\})$ per la quale, usando Bayes, abbiamo

$$P(\{R_1 \cap R_2\}|\{Y_1 \cap Y_2\}) = \frac{P(\{Y_1 \cap Y_2\}|\{R_1 \cap R_2\})\, P(R_1 \cap R_2)}{P(Y_1 \cap Y_2)}$$

Ora:

$$\begin{aligned}
&P(\{Y_1 \cap Y_2\}|\{R_1 \cap R_2\}) = 1 \\
&P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{4} \\
&P(Y_1 \cap Y_2) = P(\{Y_1 \cap Y_2\}|\{R_1 \cap R_2\})\, P(R_1 \cap R_2) \\
&\qquad + P(\{Y_1 \cap Y_2\}|\{R_1 \cap R_2^c\})\, P(R_1 \cap R_2^c) \\
&\qquad + P(\{Y_1 \cap Y_2\}|\{R_1^c \cap R_2\})\, P(R_1^c \cap R_2) \\
&\qquad + P(\{Y_1 \cap Y_2\}|\{R_1^c \cap R_2^c\})\, P(R_1^c \cap R_2^c) \\
&\quad = 1\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{4} + 0\,\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

e quindi

$$P(\{R_1 \cap R_2\}|\{Y_1 \cap Y_2\}) = \frac{1\,1/4}{3/8} = \frac{8}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

(ii) Sia Y= "la pallina estratta è rossa"; la probabilità richiesta è: $P(Y|Y_1 \cap Y_2)$. Abbiamo

$$P(Y|Y_1 \cap Y_2) = \frac{P(Y \cap \{Y_1 \cap Y_2\})}{P(Y_1 \cap Y_2)} = \frac{8}{3}\, P(Y \cap \{Y_1 \cap Y_2\})$$

Inoltre, usando le probabilità totali ed indicando, per brevità, $A = Y \cap \{Y_1 \cap Y_2\}$,

$$\begin{aligned} P(Y \cap \{Y_1 \cap Y_2\}) &= P(A|\{R_1 \cap R_2\})\, P(R_1 \cap R_2) + P(A|\{R_1 \cap R_2^c\})\, P(R_1 \cap R_2^c) \\ &+ P(A|\{R_1^c \cap R_2\})\, P(R_1^c \cap R_2) + P(A|\{R_1^c \cap R_2^c\})\, P(R_1^c \cap R_2^c) \\ &= 1\,\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + 0 = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

e quindi

$$P(Y|Y_1 \cap Y_2) = \frac{8}{3}\,\frac{5}{16} = \frac{5}{6}$$

2. Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti uniformi sull'intervallo $[0,1]$. Determinare:

- $E[|X - Y|]$;
- $E[Max(X,Y)]$;
- $E[Min(X,Y)]$;
- $E[X^2 + Y^2]$;
- $E[(X+Y)^2]$;

Soluzione. Si ha $f_X(x) = 1$ se $0 \le x \le 1$ ed $f_X(x) = 0$ altrimenti. Analogamente $f_Y(y) = 1$ se $0 \le y \le 1$ ed $f_Y(y) = 0$ altrimenti. Inoltre, siccome X ed Y sono indipendenti, $f_{XY}(x,y) = 1$ se $0 \le x, y \le 1$ e $f_{XY}(x,y) = 0$ altrimenti. Indichiamo con D il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, t.c. 0 \le x, y \le 1\}$.

-
$$\begin{aligned} E[|X - Y|] &= \int\int_D |x-y|\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)\, dy + \\ &+ \int_0^1 dx \int_x^1 (y-x)\, dy = \int_0^1 dx \left[x\,y - \frac{y^2}{2}\right]_0^x + \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} - x\,y\right]_x^1 = \\ &= \int_0^1 dx\, \frac{x^2}{2} + \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned} E[Max(X,Y)] &= \int\int_D Max(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x x\, dy + \int_0^1 dx \int_x^1 y\, dy = \\ &= \int_0^1 dx\, x^2 + \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} E[Min(X,Y)] &= \int\int_D Min(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x y\, dy + \int_0^1 dx \int_x^1 x\, dy = \\ &= \int_0^1 dx\, \frac{x^2}{2} + \int_0^1 dx\, x\, (1-x) = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} E[X^2+Y^2] &= \int\int_D (x^2+y^2)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2)\, dy = \\ &= \int_0^1 dx \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} E[(X+Y)^2] &= \int\int_D (x+y)^2\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)^2\, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2+2xy)\, dy = \\ &= \int_0^1 dx \left(x^2 + \frac{1}{3} + x\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

3. Un insieme di misurazioni del punto di fusione del piombo fornisce i seguenti dati, in gradi centigradi:

   330, 328.6 342.4 334 337.5 341 343.3 329.5 322 331

   Supponendo che i dati provengano da una popolazione normale di varianza incognita, determinare gli intervalli di confidenza al 90%, 95 % e 99% per la media.

   Soluzione. Il rango del campione è $n = 10$ e dobbiamo usare la distribuzione di Student con 9 gradi di libertà. Dalle tavole di Student abbiamo: $t_{0.05}(9) = 1.833$, $t_{0.025}(9) = 2.262$ e $t_{0.005}(9) = 3.25$. Dai dati abbiamo $\overline{X} = 333.9$ e $S^2 = 48.5$. Gli intervalli di confidenza sono pertanto:

   $$\begin{aligned} &\text{Al 90\%:} && \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{0.05}(9),\quad \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{0.05}(9)\right] = [329.9, 338.0] \\ &\text{Al 95\%:} && \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{0.025}(9),\quad \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{0.025}(9)\right] = [328.9, 338.9] \\ &\text{Al 99\%:} && \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{0.005}(9),\quad \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{0.005}(9)\right] = [326.8, 341.1] \end{aligned}$$

4. Su un ponte passano in media 10 pedoni al minuto, e il numero di pedoni che transitano attraverso il ponte segue una legge di Poisson. Una cellula fotoelettrica viene posizionata alla fine del ponte ma, per costruzione, non riesce ad effettuare più di 20 conteggi. Se Y è il numero di conteggi effettuati dallo strumento, qual è la sua distribuzione ?

Soluzione. Sia X il numero di pedoni che passano al minuto. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&P(X = k) = e^{-10}\,\frac{10^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ...\\
&P(Y = k) = e^{-10}\,\frac{10^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ..., 19\\
&P(Y = 20) = \sum_{k=20}^{\infty} e^{-10}\,\frac{10^k}{k!}\\
&P(Y = k) = 0, \quad k = 21, 22, ...
\end{aligned}$$