Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2013/2014
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 13 gennaio 2014

1. In una data università, le studentesse sono il 52%, gli iscritti ad informatica il 5% del totale, le studentesse di informatica il 2% del totale di studenti. Se si sceglie uno studente a caso, qual è la probabilità che

   (i) sia una femmina, sapendo che studia informatica?

   (ii) studi informatica, sapendo che è femmina?

Soluzione. Definiamo gli eventi: $F =$"studente femmina", $I =$"studente di informatica" (di qualunque genere), $A =$"studentessa di informatica". Abbiamo allora $P(F) = 0.52$, $P(I) = 0.05$, $P(A) = 0.02$.

(i) Dobbiamo trovare $P(F|I)$. Abbiamo che:

$$P(F|I) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} = \frac{0.02}{0.05} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

(ii) Dobbiamo trovare $P(I|F)$. Abbiamo che:

$$P(I|F) = \frac{P(F \cap I)}{P(F)} = \frac{0.02}{0.52} = \frac{1}{26} = 0.038.$$

2. La densità congiunta di due variabili continue X ed Y è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,e^{-(x+y)} & x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (i) Calcolare la densità marginale di X;

   (ii) calcolare la densità marginale di Y;

   (iii) calcolare il valore di aspettazione di X;

   (iv) calcolare il valore di aspettazione di Y;

   (v) le due variabili sono indipendenti?

Soluzione.

(i), (ii)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\infty} x\, e^{-(x+y)} dy = x\, e^{-x}, \qquad x > 0;$$
$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} x\, e^{-(x+y)} dx = e^{-y}, \qquad y > 0;$$

(iii), (iv)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2\, e^{-x}\, dx = 2$$
$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^{\infty} y\, e^{-y}\, dx = 1$$

(v) $f_X(x)\, f_Y(y) = x\, e^{-x}\, e^{-y} = x\, e^{-(x+y)} = f(x,y)$; si, sono indipendenti.

3. II tempo (in ore) necessario per riparare un macchinario è una variabile aleatoria di distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$.

   (i) Qual'è la probabilità che la riparazione superi le 2 ore di tempo?

   (ii) Qual'è la probabilità che la riparazione superi le 3 ore, sapendo che ne richiede più di 2?

Soluzione. Sia X il tempo, in ore, necessario per la riparazione. La densità di probabilità di X è data da $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ per $t > 0$ e $f(t) = 0$ per $t < 0$, con $\lambda = 1$. Quindi:

(i)

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_2^{\infty} = e^{-2} \approx 0.14$$

(ii)

$$P(X > 3|X > 2) = \frac{P(\{X > 3\} \cap \{X > 2\})}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{\int_3^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_2^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{e^{-3}}{e^{-2}} = \frac{1}{e} \approx 0.37$$

4. Un insieme di 10 determinazioni della percentuale di acqua in una soluzione di metanolo riporta i seguenti valori:

   0.50, 0.55, 0.53, 0.56, 0.54, 0.57, 0.52, 0.60, 0.55, 0.58.

   Determinare un intervallo di confidenza al 95% per la percentuale reale.

Soluzione. La media campionaria è data da $\overline{X}_n$ =0.55 e la deviazione standard campionaria da S_n =0.03. L'intervallo di confidenza al 95% e' dato da

$$\left[\overline{X}_n - t_{\alpha/2}(n-1)\, \frac{S_n}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_n + t_{\alpha/2}(n-1)\, \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$$

con $n = 10$, $\alpha = 0.05$, da cui (vedi tavole) $t_{\alpha/2}(n-1) = 2.262$. In conclusione, l'intervallo (arrotondando alla seconda cifra decimale) è $[0.53, 0.57]$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2013/2014
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 13 gennaio 2014

1. In una scuola superiore, le studentesse sono il 45%, gli studenti della classe IIIC l'8% del totale, le studentesse nella classe IIIC il 2% del totale di studenti. Se si sceglie uno studente a caso, qual è la probabilità che

   (i) sia una femmina, sapendo che frequenti la IIIC?

   (ii) frequenti la IIIC, sapendo che è femmina?

Soluzione. Definiamo gli eventi: $F =$"studente femmina", $C =$"studente della IIIC" (di qualunque genere), $A =$"studentessa della IIIC". Abbiamo allora $P(F) = 0.45$, $P(C) = 0.08$, $P(A) = 0.02$.

(i) Dobbiamo trovare $P(F|C)$. Abbiamo che:

$$P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0.02}{0.08} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

(ii) Dobbiamo trovare $P(C|F)$. Abbiamo che:

$$P(C|F) = \frac{P(F \cap C)}{P(F)} = \frac{0.02}{0.45} = 0.044.$$

2. La densità congiunta di due variabili continue X ed Y è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,e^{(x-y)} & x < 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (i) Calcolare la densità marginale di X;

   (ii) calcolare la densità marginale di Y;

   (iii) calcolare il valore di aspettazione di X;

   (iv) calcolare il valore di aspettazione di Y;

   (v) le due variabili sono indipendenti?

Soluzione.

(i), (ii)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\infty} y\, e^{(x-y)}dy = e^x, \qquad x < 0;$$
$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{0} y\, e^{(x-y)}dx = y\, e^{-y}, \qquad y > 0;$$

(iii), (iv)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x\, e^x\, dx = -1$$
$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^{\infty} y^2\, e^{-y}\, dx = 2$$

(v) $f_X(x)\, f_Y(y) = e^x\, y\, e^{-y} = y\, e^{(x-y)} = f(x,y)$; si, sono indipendenti.

3. II tempo (in giorni) afinchè si manifesti l'efficacia di una certa medicina è una variabile aleatoria di distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$.

   (i) Qual'è la probabilità che siano necessari più di 2 giorni affinchè si manifesti l'efficacia della medicina?

   (ii) Qual'è la probabilità che siano necessari più di 3 giorni affinchè si manifesti l'efficacia della medicina, sapendo che ne sono necessari più di 2?

Soluzione. Sia X il tempo, in giorni, necessario per l'efficacia della medicina. La densità di probabilità di X è data da $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ per $t > 0$ e $f(t) = 0$ per $t < 0$, con $\lambda = 2$. Quindi:

(i)

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_2^{\infty} = e^{-4} \approx 0.018$$

(ii)

$$P(X > 3 | X > 2) = \frac{P(\{X > 3\} \cap \{X > 2\})}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{\int_3^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_2^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{e^{-6}}{e^{-4}} = \frac{1}{e^2} \approx 0.14$$

4. Un insieme di 10 determinazioni della percentuale di acqua in una soluzione di metanolo riporta i seguenti valori:

   0.52, 0.57, 0.50, 0.51, 0.56, 0.57, 0.51, 0.61, 0.54, 0.50.

Determinare un intervallo di confidenza al 95% per la percentuale reale.

Soluzione. La media campionaria è data da $\overline{X}_n$ =0.54 e la deviazione standard campionaria da S_n =0.04. L'intervallo di confidenza al 95% e' dato da

$$\left[\overline{X}_n - t_{\alpha/2}(n-1)\,\frac{S_n}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_n + t_{\alpha/2}(n-1)\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$$

con $n = 10$, $\alpha = 0.05$, da cui (vedi tavole) $t_{\alpha/2}(n-1) = 2.262$. In conclusione, l'intervallo (arrotondando alla seconda cifra decimale) è $[0.51, 0.57]$.