Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale
Sede di Fermo
Anno Accademico 2012/2013
Probabilità e Statistica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 15 novembre 2013

1. In un'elezione comunale si presentano 4 liste. Siano n_1, n_2, n_3 ed n_4 i voti riportati da ciascuna lista. Si intervista quindi un elettore a caso e si denota con X il numero totale di voti riportati dalla lista per cui ha dichiarato di aver dato il voto. Si sceglie, poi, indipendentemente e a caso, una delle quattro liste e si denota con Y il numero totale di voti riportati da quella lista.

   (i) Qualè la distribuzione di probabilità di X e di Y?

   (ii) Qualè il valore di aspettazione di X e di Y?

   (iii) Rispondere alle domande precedenti nel caso in cui gli elettori in totale siano 1480 e le quattro liste abbiano riportato rispettivamente 400, 330, 250 e 500 voti.

Soluzione.

(i) Le due variabili casuali X e Y sono discrete e possono assumere gli stessi valori, $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, con probabilità $p_X(n_i) = n_i/N$ e $p_Y(n_i) = 1/4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

(ii) $E[X] = \sum_{i=1}^{4} n_i\, p_X(n_i) = \sum_{i=1}^{4}(n_i^2)/N$; $E[Y] = \sum_{i=1}^{4} n_i\, p_Y(n_i) = \sum_{i=1}^{4}(n_i)/4 = N/4$.

(iii) $p_X(n_1) = 400/1480 = 0.27$, $p_X(n_2) = 330/1480 = 0.22$, $p_X(n_3) = 250/1480 = 0.17$, $p_X(n_4) = 500/1480 = 0.34$; dunque $E[X] = 392.8$ e $E[Y] = 370$.

2. II numero di telefonate in arrivo al centralino di un centro prenotazioni di una piccola clinica privata segue una distribuzione di Poisson con media di 5 all'ora.

   (i) Qual'è la probabilità che vi siano almeno 2 chiamate dalle 10.30 alle 11.00?

   (ii) Assumendo ancora che l'evento del punto *(i)* si verifichi, qual'è la probabilità che dalle 10.30 alle 11.15 vi siano almeno 4 chiamate?

Soluzione. Sia X il numero di telefonate in un'ora. Allora X è distribuita secondo

$$\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

con $\lambda = 5$.

(i) Il numero di telefonate in mezz'ora, che indichiamo con Y, avrà ancora una distribuzione di Poisson con $\lambda_Y = 5/2 = 2.5$. Avremo allora

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{(2.5)^k \, e^{-2.5}}{k!} = 1 - 3.5 \, e^{-2.5} = 0.71 \end{aligned}$$

(ii) Dobbiamo considerare il numero di telefonate, W, in 45 minuti, che segue la distribuzione di Poisson con $\lambda_Z = 5 \times 3/4 = 3.75$. La probabilità richiesta è una probabilità condizionata, data da

$$\begin{aligned} P(W \geq 4 | W \geq 2) &= \frac{P(\{W \geq 4\} \cap \{W \geq 2\})}{P(W \geq 2)} = \frac{P(\{W \geq 4\})}{P(W \geq 2)} \\ &= \frac{1 - \sum_{k=0}^{3} P(W = k)}{1 - \sum_{k=0}^{1} P(W = k)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^{3} (3.75)^k e^{-3.75}/k!}{1 - \sum_{k=0}^{1} (3.75)^k e^{-3.75}/k!} = 0.54 \end{aligned}$$

3. La durata di un certo tipo di pneumatici è una variabile aleatoria di media 40000 km e deviazione standard 10000 km. Usando l'approssimazione normale, calcolare la probabilità che un'automobile che percorre 20000 km all'anno debba usare più di 6 treni di gomme nei primi 10 anni.

Soluzione. Sia X_i la durata di un treno di gomme, distribuita secondo una legge $N(\mu, \sigma^2)$ con i dati forniti. In un periodo di 10 anni la macchina percorre 200000 km. La probabilità che si debbano usare 6 o più set di gomme equivale alla probabilità che la somma delle durate di 3 set sia non superiore 200000 km. Abbiamo pertanto:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + \ldots + X_6 \leq 200000) &= P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_6 - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \leq \frac{200000 - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}}\right) \\ &= P(S_n \leq -1.63) = \Phi(-1.63) = 1 - \Phi(1.63) = 1 - 0.95 = 0.05 \end{aligned}$$

dove S_n è la variabile che, per il teorema del limite centrale, segue una distribuzione normale standard. La probabilità richiesta è pertanto circa del 5%.

4. Un segnale elettrico di intensità μ (unità arbitrarie) viene trasmesso da una sorgente A e ricevuto da una ricevente B. Il valore registrato dalla ricevente è distribuito secondo una legge normale di media e varianza incognite. Se 9 registrazioni del segnale ricevuto danno i valori $6, 9.5, 10, 12, 8, 9, 8.5, 7.5, 11.5$, si determini un intervallo di confidenza al 95% per μ.

Soluzione. Siccome la varianza è incognita ed il campione piccolo, dovremo usare la legge di Student ad 8 gradi di libertà. Abbiamo per la media campionaria $\overline{X}_n = 9.1$, e $S^2 = 3.6$ per la varianza campionaria, con $n = 9$. L'intervallo di confidenza è dato da

$$\left(\overline{X}_n - t_{\alpha/2}(8)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{\alpha/2}(8)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(9 - t_{\alpha/2}(8)\sqrt{\frac{3.6}{9}}, 9 + t_{\alpha/2}(8)\sqrt{\frac{3.6}{9}}\right)$$

Nel nostro caso $t_{0.025}(8) = 2.306$ e sostituendo si ottiene $\mu \in (7.65, 10.57)$