Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale
Sede di Fermo
Anno Accademico 2012/2013
Probabilità e Statistica

Nome ....

N. Matricola .... Fermo, 8 novembre 2013

1. N alunni di una scuola vengono trasportati presso un campo sportivo con 4 autobus di diversa capienza. Siano n_1, n_2, n_3 ed n_4 gli alunni che salgono su ciascun autobus. Si sceglie un alunno a caso e si denota con X il numero totale di alunni saliti sullo stesso autobus. Si sceglie, poi, indipendentemente, uno dei quattro autisti e si denota con Y il numero totale di alunni che salgono sull'autobus da lui guidato.

   (i) Qualè la distribuzione di probabilità di X e di Y?

   (ii) Qualè il valore di aspettazione di X e di Y?

   (iii) Rispondere alle domande precedenti nel caso in cui gli alunni in totale siano 148 e sui quattro autobus salgono rispettivamente 40,33,25 e 50 alunni.

Soluzione.

(i) Le due variabili casuali X e Y sono discrete e possono assumere gli stessi valori, $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, con probabilità $p_X(n_i) = n_i/N$ e $p_Y(n_i) = 1/4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

(ii) $E[X] = \sum_{i=1}^{4} n_i\, p_X(n_i) = \sum_{i=1}^{4}(n_i^2)/N$; $E[Y] = \sum_{i=1}^{4} n_i\, p_Y(n_i) = \sum_{i=1}^{4}(n_i)/4 = N/4$.

(iii) $p_X(n_1) = 40/148 = 0.27$, $p_X(n_2) = 33/148 = 0.22$, $p_X(n_3) = 25/148 = 0.17$, $p_X(n_4) = 50/148 = 0.34$; dunque $E[X] = 39.28$ e $E[Y] = 37$.

2. In una certa regione i terremoti si susseguono secondo un processo di Poisson di media 5 all'anno.

   (i) Qual'è la probabilità che vi siano almeno 2 terremoti nella prima metà del 2015?

   (ii) Assumendo ancora che l'evento del punto *(i)* si verifichi, qual'è la probabilità che nei primi 9 mesi del 2015 vi siano almeno 4 terremoti?

Soluzione. Sia X il numero di terremoti in un anno. Allora X è distribuita secondo

$$\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

con $\lambda = 5$.

(i) Il numero di terremoti in metà anno, che indichiamo con Y, avrà ancora una distribuzione di Poisson con $\lambda_Y = 5/2 = 2.5$. Avremo allora

$$
\begin{aligned}
P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{(2.5)^k \, e^{-2.5}}{k!} = 3.5 \, e^{-2.5} = 0.28
\end{aligned}
$$

(ii) Dobbiamo considerare il numero di terremoti, W, in 9 mesi, che segue la distribuzione di Poisson con $\lambda_Z = 5 \times 9/12 = 3.75$. La probabilità richiesta è una probabilità condizionata, data da

$$
\begin{aligned}
P(W \geq 4 | W \geq 2) &= \frac{P(\{W \geq 4\} \cap \{W \geq 2\})}{P(W \geq 2)} = \frac{P(\{W \geq 4\})}{P(W \geq 2)} \\
&= \frac{1 - \sum_{k=0}^{3} P(W = k)}{1 - \sum_{k=0}^{1} P(W = k)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^{3} (3.5)^k e^{-3.5}/k!}{1 - \sum_{k=0}^{1} (3.5)^k e^{-3.5}/k!} = 0.54
\end{aligned}
$$

3. La durata di un certo tipo di batterie è una variabile aleatoria di media 5 settimane e deviazione standard 1.5 settimane. Usando l'approssimazione normale, calcolare la probabilità che si debbano impiegare 13 o più batterie in un anno.

Soluzione. Sia X_i la durata di una batteria, distribuita secondo una legge $N(\mu, \sigma^2)$ con i dati forniti. La probabilità che si debbano usare 13 o più batterie equivale alla probabilità che la somma delle vite medie di 13 batterie sia non superiore ad un anno, cioè 52 settimane. Abbiamo pertanto:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 + ... + X_{13} \leq 52) &= P\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_{13} - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \leq \frac{52 - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \right) \\
&= P(S_n \leq -2.4) = \Phi(-2.4) = 1 - \Phi(2.4) = 1 - 0.9918 = 0.008
\end{aligned}
$$

dove S_n è la variabile che, per il teorema del limite centrale, segue una distribuzione normale standard. La probabilità richiesta è pertanto circa del 0,8%.

4. Un segnale elettrico di intensità μ (unità arbitrarie) viene trasmesso da una sorgente A e ricevuto da una ricevente B. Il valore registrato dalla ricevente è distribuito secondo una legge normale di media e varianza incognite. Se 9 registrazioni del segnale ricevuto danno i valori $5, 8.5, 12, 15, 7, 9, 7.5, 6.5, 10.5$, si determini un intervallo di confidenza al 95% per μ.

Soluzione. Siccome la varianza è incognita ed il campione piccolo, dovremo usare la legge di Student ad 8 gradi di libertà. Abbiamo per la media campionaria $\overline{X}_n = 9$, e $S^2 = 9.5$ per la varianza campionaria, con $n = 9$. L'intervallo di confidenza è dato da

$$
\left(\overline{X}_n - t_{\alpha/2}(8)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{\alpha/2}(8)\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \left(9 - t_{\alpha/2}(8)\sqrt{\frac{9.5}{9}}, 9 + t_{\alpha/2}(8)\sqrt{\frac{9.5}{9}} \right)
$$

Nel nostro caso $t_{0.025}(8) = 2.306$ e sostituendo si ottiene $\mu \in (6.63, 11.37)$