Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2012/2013
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 19 settembre 2013

1. Affinchè una legge arrivi al Presidente della Repubblica per la firma, deve aver ricevuto l'approvazione sia della Camera che del Senato. Si supponga che, di tutte le leggi presentate ai due rami del parlamento, il 60% passa alla Camera, 80% passa al Senato ed il 90% passa ad almeno uno dei due. Calcolare la probabilità che la prossima legge presentata ai due rami del Parlamento arrivi al Presidente della Repubblica per la firma.

Soluzione. Indichiamo con F l'evento "la legge arriva al Presidente, con C l'evento "la legge passa alla Camera e con S l'evento "la legge passa al Senato. Ovviamente, siccome per il verificarsi di F si devono verificare sia C che S, abbiamo $F = C \cap S$. I dati del problema sono: $P(S) = 0.8$, $P(C) = 0.6$ e $P(S \cup C) = 0.9$. Dalla relazione

$$P(S \cup C) = P(S) + P(C) - P(S \cap C)$$

ricaviamo

$$P(F) = P(S \cap C) = P(S) + P(C) - P(S \cup C) = 0.8 + 0.6 - 0.9 = 0.5$$

2. Un materiale radioattivo emette particelle α ad un tasso descritto da una variabile casuale continua di legge esponenziale

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda\, t},$$

dove λ è noto e t è il tempo misurato in secondi. Qualè la probabilità che una particella venga emessa nei primi 10 secondi, dato che

(i) nessuna particella viene emessa nel primo secondo;

(ii) nessuna particella viene emessa nei primi 5 secondi;

(iii) una particella viene emessa nei primi 3 secondi;

(iv) una particella viene emessa nei primi 20 secondi.

Soluzione. Definiamo gli eventi:

- $A =$ "una particella viene emessa nei primi 10 secondi";
- $B =$ "nessuna particella viene emessa nel primo secondo";

- $C =$ "nessuna particella viene emessa nei primi 5 secondi";
- $D =$ "una particella viene emessa nei primi 3 secondi";
- $E =$ "una particella viene emessa nei primi 20 secondi".

Abbiamo:

$$P(A) = \int_0^{10} f(t)\,dt = \left[-e^{-\lambda\,t}\right]_0^{10} = 1 - e^{-10\,\lambda}$$
$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \int_0^{1} f(t)\,dt = 1 - \left[-e^{-\lambda\,t}\right]_0^{1} = 1 - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}$$
$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \int_0^{5} f(t)\,dt = 1 - \left[-e^{-\lambda\,t}\right]_0^{5} = 1 - (1 - e^{-5\,\lambda}) = e^{-5\,\lambda}$$
$$P(D) = \int_0^{3} f(t)\,dt = \left[-e^{-\lambda\,t}\right]_0^{3} = 1 - e^{-3\,\lambda} \quad \text{ma non servirà}$$
$$P(E) = \int_0^{20} f(t)\,dt = \left[-e^{-\lambda\,t}\right]_0^{20} = 1 - e^{-20\,\lambda}$$

e quindi (includendo anche i valori numerici per $\lambda = 0.1$):

(i)

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{\int_1^{10} f(t)\,dt}{e^{-\lambda}} = \frac{\left[-e^{-\lambda\,t}\right]_1^{10}}{e^{-\lambda}} = \frac{e^{-\lambda} - e^{-10\,\lambda}}{e^{-\lambda}} = 1 - e^{-9\,\lambda} = 0.593;$$

(ii)

$$P(A|C) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)} = \frac{\int_5^{10} f(t)\,dt}{e^{-5\,\lambda}} = \frac{\left[-e^{-\lambda\,t}\right]_5^{10}}{e^{-5\,\lambda}} = \frac{e^{-5\,\lambda} - e^{-10\,\lambda}}{e^{-5\,\lambda}} = 1 - e^{-5\,\lambda} = 0.393;$$

(iii)

$$P(A|D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{P(D)}{P(D)} = 1;$$

(iv)

$$P(A|E) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)} = \frac{P(A)}{P(E)} = \frac{1 - e^{-10\,\lambda}}{1 - e^{-20\,\lambda}} = 0.731;$$

3. Una ditta produce cuscinetti il cui diametro è descritto da una variabile casuale normale X di media $\mu = 1$ cm e deviazione standard $\sigma = 0.002$ cm. Le specifiche di un acquirente richiedono che i diametri stiano nell'intervallo $[1 - 0.003, 1 + 0.003]$ cm.

   (i) Che percentuale di cuscinetti dovrà essere scartata?

   (ii) quanto deve valere σ affinchè la percentuale scartata non sia superiore all' 1%?

Soluzione.

(i) La percentuale di cuscinetti che dovrà essere scartata corrisponde a $P(|X-1|>0.003)$. Standardizzando:

$$Z=\frac{X-1}{0.002}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(|X-1|>0.003) &= P\left(|Z|>\frac{0.003}{0.002}\right)=1-P(|Z|<1.5) \\ &= 1-[\Phi(1.5)-\Phi(-1.5)]=1-\Phi(1.5)+[1-\Phi(1.5)] \\ &= 2-2\,\Phi(1.5)=2\,(1-0.933)=0.134 \end{aligned}$$

(ii) In questo caso σ è incognita ed abbiamo:

$$Z=\frac{X-1}{\sigma}$$

e quindi

$$\begin{aligned} & P(|X-1|>0.003)=P\left(|Z|>\frac{0.003}{\sigma}\right)=0.1 \\ & 0.1=P\left(|Z|>\frac{0.003}{\sigma}\right)=2-2\,\Phi\left(\frac{0.003}{\sigma}\right) \\ & \Phi\left(\frac{0.003}{\sigma}\right)=\frac{1.99}{2}=0.995 \end{aligned}$$

Dalla tabella dei quantili, in corrispondenza allo 0.5%, abbiamo

$$\frac{0.003}{\sigma}=2.576 \qquad\qquad \sigma=\frac{0.003}{2.576}=0.0012$$

4. In una fabbrica ci sono 5 catene di produzione e si vuole verificare l'ipotesi che il numero di pezzi difettosi sia lo stesso per le cinque catene. Una statistica fornisce i seguenti dati:

Catena	Pezzi difettosi
1	11
2	13
3	9
4	12
5	8

Sulla base di questo campione, si può accettare, con un livello di significatività del 5%, l'ipotesi che la proporzione di pezzi difettosi sia costante sulle catene di produzione?

Soluzione. Si tratta di eseguire un test del χ^2 al 5% sul campione dato, ipotizzando una distribuzione discreta uniforme. Se la distribuzione dei pezzi difettosi fosse uniforme sulle catene, avremmo delle frequenze attese ω_n tutte uguali, ed uguali alla media di quelle osservate Ω_n, cioè

$$\frac{11+13+9+12+8}{5}=\frac{53}{5}=10.6$$

la variabile distribuita secondo la legge del χ^2 è pertanto

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{(\omega_n - \Omega_n)^2}{\omega_n} = 1.75.$$

Per il numero di gradi di libertà l abbiamo $l = 5 - 1 - 1 = 3$, poichè i dati sono stati usati una volta per calcolare la media. Dalle tavole abbiamo $\chi^2_{0.05}(3) = 7.815$ e quindi l'ipotesi di una distribuzione uniforme dei pezzi difettosi tra le catene è verificata.